

Sur l'hyperbolicité de graphes associés au groupe de Cremona

Anne Lonjou

Résumé. Poursuivant l'analogie déjà existante entre le groupe modulaire et le groupe de Cremona de rang 2 sur un corps algébriquement clos, nous cherchons un graphe sur lequel le groupe de Cremona agit de façon non triviale et qui est un analogue du graphe des courbes. Un candidat naturel est un graphe introduit par D. Wright. Cependant, répondant du même coup à une question de A. Minasyan et D. Osin, nous montrons que ce graphe n'est pas Gromov-hyperbolique. Nous construisons ensuite deux graphes associés au pavage de Voronoï du groupe de Cremona, introduit dans un précédent travail de l'auteur. Nous montrons que l'un est quasi-isométrique au graphe de Wright. Nous prouvons que le second, quant à lui, est hyperbolique.

Mots-clés. Groupe de Cremona, espace hyperbolique, graphe Gromov-hyperbolique, graphe de Cayley, pavage de Voronoï

Classification mathématique par matières (MSC 2010). 14E07 ; 20F65

[English]

Title. On the hyperbolicity of graphs associated to the Cremona group

Abstract. To reinforce the analogy between the mapping class group and the Cremona group of rank 2 over an algebraic closed field, we look for a graph analogous to the curve graph and such that the Cremona group acts on it non-trivially. A candidate is a graph introduced by D. Wright. However, we demonstrate that it is not Gromov-hyperbolic. This answers a question of A. Minasyan and D. Osin. Then, we construct two graphs associated to a Voronoï tessellation of the Cremona group introduced in a previous work of the author. We show that one is quasi-isometric to the Wright graph. We prove that the second one is Gromov-hyperbolic.

Received by the Editors on October 18, 2018, and in final form on April 8, 2019.
Accepted on June 28, 2019.

Anne Lonjou

Universität Basel, Departement Mathematik und Informatik, Spiegelgasse 1, 4051 Basel, Switzerland

e-mail: anne.lonjou@unibas.ch

Table des matières

Introduction	2
1. Préliminaires	5
2. Graphe de Wright	9
3. Graphes associés au pavage de Voronoï	16
Références	28

Introduction

Dans cet article, le corps de base, noté k , est algébriquement clos (sauf mention du contraire). Les surfaces considérées sont projectives et lisses. Les graphes étudiés sont munis de la métrique standard qui rend chaque arête isométrique à l'intervalle fermé réel $[0, 1]$.

Nous nous intéressons au groupe de Cremona de rang 2 sur un corps k , noté $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, qui est le groupe des transformations birationnelles du plan projectif (pour alléger l'écriture nous notons le plan projectif \mathbb{P}^2 au lieu de \mathbb{P}_k^2). Il existe des analogies entre le groupe de Cremona, le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et le groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma_g)$ d'une surface compacte de genre $g \geq 2$ (le groupe des homéomorphismes de cette surface préservant l'orientation à homotopie près). Les groupes $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et $\text{Mod}(\Sigma_g)$ agissent sur des espaces combinatoires qui sont Gromov-hyperboliques, c'est-à-dire des espaces combinatoires dont les triangles sont uniformément fins. Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ agit sur l'arbre de Bass-Serre associé au scindement $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le groupe $\text{Mod}(\Sigma_g)$ agit sur le complexe des courbes dont les sommets sont les classes d'isotopies de lacets simples et essentiels sur Σ_g et dont les simplexes de dimension n sont donnés par $n + 1$ classes d'isotopies de lacets simples et essentiels de Σ_g admettant des représentants deux à deux disjoints. Ces deux groupes ont également été une source d'inspiration pour l'étude du groupe $\text{Out}(F_n)$, le groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre à n générateurs (le quotient du groupe des automorphismes de F_n par le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs de F_n). Ainsi, des complexes simpliciaux sur lesquels le groupe $\text{Out}(F_n)$ agit de façon non triviale et étant candidats à être analogue au complexe des courbes, ont été construits (voir [BF14] et [HM13]).

Nous nous proposons de faire de même pour le groupe de Cremona. Le but de cet article est de construire un graphe Gromov-hyperbolique sur lequel le groupe de Cremona agit de façon non triviale.

Graphe de Wright

Le complexe de Wright [Wri92] est un complexe simplicial, de dimension 2 et simplement connexe sur lequel le groupe de Cremona agit. Il est obtenu en utilisant la structure de produit amalgamé sur trois facteurs du groupe de Cremona sur un corps algébriquement clos. Comme nous nous intéressons à la propriété de Gromov-hyperbolicité, seul le 1-squelette nous intéresse. Nous montrons que ce graphe non localement fini est de diamètre infini (Corollaire 2.7), ce qui n'était pas évident a priori. Nous nous demandons ensuite si ce graphe est Gromov-hyperbolique. Cette question a été posée par A. Minasyan et D. Osin dans [MO15, Problem 8.5]. Leur motivation était, dans le cas où la réponse est positive, de trouver une nouvelle manière de montrer que le groupe de Cremona n'est pas simple en utilisant les résultats de [DGO17]. En fait, la réponse à cette question est négative.

Théorème A. *Le graphe de Wright n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

Le premier point dans la preuve est de remarquer que le graphe de Wright est quasi-isométrique à un graphe lié au système de générateurs du groupe de Cremona donné par $\text{PGL}(3, k)$ et les applications de Jonquières. C'est un analogue du graphe de Cayley dans le cas d'un groupe de type fini. Nous appelons

ce graphe « le graphe de Wright modifié ». Les sommets de ce graphe sont les éléments du groupe de Cremona modulo pré-composition par un élément de $\mathrm{PGL}(3, k)$. Une arête relie deux sommets s'il existe une application de Jonquières envoyant un sommet sur l'autre. Ici, une application de Jonquières est une application préservant un pinceau de droites. La distance entre deux sommets $f, g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ correspond au nombre minimal d'applications de Jonquières qu'il faut pour décomposer l'application $g^{-1} \circ f$. Dans [BF19], J. Blanc et J.-P. Furter appellent cet entier « longueur de translation » de l'application $g^{-1} \circ f$. Ils déterminent un algorithme pour déterminer cette longueur. À noter qu'ils obtiennent eux aussi que le graphe de Wright est de diamètre infini. Cependant la preuve présentée ici est plus élémentaire car elle ne requiert pas la notion de longueur d'une application. Une conséquence de leur théorème principal ([BF19, Corollaire 3.29]) est que l'algorithme proposé dans [AC02] donne aussi le nombre minimal de Jonquières.

Le second point est de montrer que ce graphe contient un sous-graphe quasi-isométrique à \mathbb{Z}^2 (Théorème 2.12). Nous utilisons pour cela deux éléments du groupe de Cremona, appelés twists de Halphen, qui sont d'ordre infini et qui commutent. Ils engendrent un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Il reste encore à montrer que l'action de ce sous-groupe sur un des sommets du graphe induit le sous-graphe recherché. Nous utilisons pour cela des résultats de J. Blanc et J.-P. Furter. À noter que le graphe de Cayley du groupe $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ n'est pas Gromov-hyperbolique car ce groupe possède également des sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z}^2 , engendrés par exemple par deux twists de Dehn le long de deux lacets disjoints.

Graphes associés au pavage de Voronoï

Un espace très utile dans l'étude du groupe de Cremona est l'espace hyperbolique de dimension infinie, noté \mathbb{H}^∞ , qui est un analogue du modèle de l'hyperboloïde de l'espace hyperbolique de dimension n . Il vit dans l'espace de Picard-Manin qui est le complété ℓ^2 de la limite inductive des groupes de Néron-Severi, à coefficients réels, des surfaces dominant \mathbb{P}^2 . L'espace de Picard-Manin est muni d'une forme bilinéaire de signature $(1, \infty)$ qui provient de la forme d'intersection. L'espace \mathbb{H}^∞ est la nappe supérieure de l'hyperboloïde défini comme le niveau 1 de la forme bilinéaire.

Les graphes étudiés dans cet article sont naturellement associés au pavage de Voronoï construit dans un précédent article [Lon19]. Nous rappelons dans un premier temps la construction de ce pavage ainsi que les résultats que nous utilisons par la suite. Dans [Lon19], nous nous sommes intéressés à un sous-domaine convexe de \mathbb{H}^∞ , noté \mathcal{E} , et contenant l'enveloppe convexe de l'orbite de la classe de la droite $\ell \in \mathbb{H}^\infty$ sous l'action du groupe de Cremona. Nous avons construit un domaine fondamental pour l'action du groupe de Cremona modulo $\mathrm{PGL}(3, k)$ sur \mathcal{E} . L'outil clé est la notion de cellules de Voronoï associées à cette orbite discrète de points qui découpent l'espace \mathcal{E} en zones d'influence déterminées par les points de l'orbite. À chaque point de l'orbite $f_\#(\ell)$, nous associons la cellule donnée par :

$$\mathcal{V}(f) = \{c \in \mathcal{E} \mid \text{pour tout } g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2), d(c, f_\#(\ell)) \leq d(c, g_\#(\ell))\}.$$

Remarquons que pour tout $a \in \mathrm{PGL}(3, k)$, f et $f \circ a$ agissent similairement sur ℓ et par conséquent déterminent la même cellule de Voronoï. Ces applications sont appelées les germes de la cellule $\mathcal{V}(f)$.

Nous avons également étudié la géométrie de ce pavage en déterminant notamment les cellules non disjointes de la cellule $\mathcal{V}(\mathrm{id})$ appelées « cellules adjacentes ». Les germes de telles cellules sont de deux types. Ceux qui sont de *caractéristique Jonquières*, c'est-à-dire les applications du groupe de Cremona telles qu'il existe deux points p et q dans \mathbb{P}^2 et qui envoient le pinceau de droites passant par le point p sur le pinceau de droites passant par le point q . L'autre type de germe des cellules adjacentes à la cellule $\mathcal{V}(\mathrm{id})$ est formé des applications du groupe de Cremona qui possèdent au plus huit points-base en position presque générale. Un ensemble de points $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ est dit *en position presque générale* si d'une part pour chaque $0 \leq i \leq r$ le point p_i vit soit dans \mathbb{P}^2 soit dans une surface dominant \mathbb{P}^2 qui est obtenue en éclatant seulement un sous-ensemble de points de $\{p_0, \dots, p_r\}$ et si d'autre part aucune des trois conditions suivantes n'est satisfaite : quatre des points de cet ensemble sont alignés, sept des points de cet ensemble sont sur une conique, deux des points de cet ensemble sont adhérents à un troisième point de cet ensemble (c-à-d ils appartiennent à la transformée stricte du diviseur obtenu en éclatant un point de cet ensemble).

Théorème 0.1 ([Lon19, Corollaire 4.7]). *L'ensemble des germes des cellules adjacentes à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ est constitué de toutes :*

- *les applications de caractéristique Jonquières,*
- *les applications qui possèdent au plus 8 points-base en position presque générale.*

Dans [Lon19], les cellules partageant une classe dans le bord à l'infini avec une cellule donnée sont appelées « cellules quasi-adjacentes ». Dans ce cas, le résultat est :

Théorème 0.2 ([Lon19, Corollaire 5.20]). *L'ensemble des germes des cellules quasi-adjacentes à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ est constitué de toutes :*

- *les applications de caractéristique Jonquières,*
- *les applications qui possèdent au plus 9 points-base en position presque générale.*

À partir de cette étude du pavage de Voronoï, nous construisons dans cet article un premier graphe appelé « graphe d'adjacence ». Les sommets de ce graphe sont les centres des cellules et il y a une arête entre deux sommets lorsque les cellules correspondantes sont adjacentes. Nous obtenons une manière de retrouver le graphe de Wright dans \mathbb{H}^∞ puisque nous montrons que le graphe d'adjacence et le graphe de Wright sont quasi-isométriques (Proposition 3.2). La Gromov-hyperbolicité étant une propriété stable par quasi-isométrie, cela implique que le graphe d'adjacence n'est pas Gromov-hyperbolique.

Un autre graphe naturel à considérer est le « graphe de quasi-adjacence ». Il est construit en considérant la combinatoire des cellules de Voronoï à l'infini. Le graphe de quasi-adjacence possède les mêmes sommets que le graphe d'adjacence. Nous mettons une arête entre deux sommets lorsque les cellules associées sont quasi-adjacentes.

Remarque 0.3. Comme deux cellules qui ont une intersection non vide possèdent également une classe commune à l'infini ([Lon19, Corollaire 5.6]), le graphe de quasi-adjacence est en fait obtenu en ajoutant des arêtes au graphe d'adjacence.

Nous montrons que ce graphe est toujours de diamètre infini et qu'il est Gromov-hyperbolique en utilisant un critère dû à B. Bowditch [Bow14] et en utilisant la Gromov-hyperbolicité de l'espace ambiant \mathcal{E} . À noter que l'espace \mathbb{H}^∞ et le graphe de quasi-adjacence ne sont pas quasi-isométriques, tout comme le demi-plan de Poincaré et l'arbre de Bass-Serre associé à $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ne sont pas quasi-isométriques.

Théorème B. *Le graphe de quasi-adjacence est hyperbolique au sens de Gromov.*

De ce point de vue, le graphe de quasi-adjacence est analogue à l'arbre de Bass-Serre, au graphe des courbes ou encore à certains complexes associés au groupe $\text{Out}(F_n)$ comme le complexe des facteurs libres ([BF14]) ou le complexe des scindements libres ([HM13]). Ajouter des arêtes au graphe d'adjacence a rendu Gromov-hyperbolique un graphe non Gromov-hyperbolique. Cette construction est similaire à celle du complexe des scindements libres qui peut être obtenu en ajoutant des simplexes à l'outre-espace, dans le cadre du groupe $\text{Out}(F_n)$. Le complexe des scindements libres est Gromov-hyperbolique ([HM13]) contrairement à l'outre-espace (voir par exemple [Vog15]).

Un groupe G est acylindriquement hyperbolique s'il existe un espace métrique Gromov-hyperbolique (X, d) sur lequel il agit par isométries, de façon non élémentaire et acylindriquement (voir par exemple [Osi16]). L'action est « acylindrique » si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous deux points suffisamment éloignés, il existe un nombre uniformément borné d'éléments du groupe déplaçant ces deux points d'au plus ε : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R, N > 0$ tel que pour tous deux points $x, y \in X$ tels que $d(x, y) \geq R$ il y a au plus N éléments $g \in G$ satisfaisant $d(x, gx) \leq \varepsilon$ et $d(y, gy) \leq \varepsilon$. Un critère ([Osi16]) pour montrer qu'un groupe non virtuellement cyclique est acylindriquement hyperbolique est de trouver un espace hyperbolique sur lequel il agit de façon non-élémentaire tel qu'il existe un élément loxodromique satisfaisant la propriété WPD (voir

[DGO17] pour plus de détails). Cependant ce critère n'implique pas que l'action en question est acylindrique mais qu'il en existe une.

B. Bowditch [Bow08] prouve que le graphe des courbes est Gromov-hyperbolique et que l'action du groupe modulaire d'une surface compacte hyperbolique sur le graphe des courbes est acylindrique (voir également [DGO17, Lemma 6.49]).

Dans [Lon16], en faisant agir le groupe de Cremona sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^∞ , l'auteur trouve des éléments loxodromiques satisfaisant la propriété WPD sur tout corps. De même, M. Bestvina et M. Feighn [BF14] prouvent que le complexe des facteurs libres est Gromov-hyperbolique et ils trouvent des éléments satisfaisant la propriété WPD. Ou encore, M. Handel et L. Mosher [HM13] obtiennent le même résultat en faisant agir le groupe $\text{Out}(F_n)$ sur le complexe des scindements libres (en prouvant que ce dernier est également Gromov-hyperbolique). Ainsi, ces trois groupes font partie de la famille des groupes « acylindriquement hyperboliques ».

Cependant, contrairement au cas du groupe modulaire agissant sur le complexe des courbes, l'action du groupe de Cremona (sur un corps quelconque) sur \mathbb{H}^∞ et l'action de $\text{Out}(F_n)$ sur le complexe des scindements libres ne sont pas acylindriques car tous les éléments loxodromiques ne satisfont pas la propriété WPD ([Osi16, Remark after Definition 2.5]). Dans le cas de l'action du groupe $\text{Out}(F_n)$ sur le complexe des facteurs libres, tous les éléments loxodromiques satisfont la propriété WPD mais il n'est pas connu si l'action est acylindrique ou pas.

Même si de par sa construction le graphe de quasi-adjacence semble plutôt être un analogue du complexe des scindements libres que du complexe des facteurs libres, il serait intéressant de voir si l'action du groupe de Cremona (lorsque k est algébriquement clos) sur le graphe de quasi-adjacence est acylindrique. Un argument en faveur de cela et que d'après [Osi16, Theorem 1.4] nous savons qu'il existe un système de générateurs du groupe de Cremona tel que le graphe de Cayley soit Gromov-hyperbolique et que l'action naturelle soit acylindrique. Or le graphe de quasi-adjacence peut être vu comme le graphe de Cayley associé à la famille génératrice constituée de $\text{PGL}(3, k)$, des applications de Jonquières et des applications ayant au plus 9 points-base en position presque générale.

À noter que classiquement un système de générateurs est donné par $\text{PGL}(3, k)$ et les applications de Jonquières. Or nous prouvons dans cet article (Corollaire 2.14) que le graphe de Cayley associé à cette famille, appelé ici « graphe de Wright modifié » n'est pas Gromov-hyperbolique.

Cependant, prouver que l'action est acylindrique sur le graphe de quasi-adjacence ne semble pas facile puisqu'actuellement il n'existe pas d'algorithme calculant la distance entre deux sommets.

Après avoir introduit les notations utiles et rappelé des résultats que nous utiliserons dans cet article, nous définissons dans la section 2 le graphe de Wright et le graphe de Wright modifié. Nous montrons qu'ils sont quasi-isométriques et de diamètre infini mais qu'ils ne sont pas Gromov-hyperboliques. Dans la section 3, nous construisons le graphe d'adjacence et le graphe de quasi-adjacence. Puis, nous montrons que le premier n'est pas Gromov-hyperbolique mais que le second l'est tout en restant de diamètre infini.

Remerciements

Je remercie vivement Stéphane Lamy, pour sa grande disponibilité et ses relectures minutieuses. Je remercie également les rapporteurs de ma thèse, Charles Favre et Yves de Cornulier, pour leurs remarques qui ont permis de rendre certains passages plus clairs. Je remercie J. Blanc et J-P. Furter pour des discussions concernant la longueur des applications du groupe de Cremona. Enfin, je remercie le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique qui m'a supporté financièrement à travers le projet « Algebraic subgroups of the Cremona groups » 200021_159921.

1. Préliminaires

Nous rappelons rapidement ici les notions dont nous avons besoin. Pour plus de détails voir [Lon17].

1.A. Action du groupe de Cremona sur \mathbb{H}^∞

Un espace essentiel dans l'étude du groupe des transformations birationnelles du plan projectif, $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, est l'espace hyperbolique de dimension infinie vivant dans l'espace de Picard-Manin. Plus de précisions se trouvent dans [BC16, Section 4], [CL13, Part II.4], [Can11, Section 3] et [Lon17, Section 1.2.3].

Soit S une surface. Une surface S' domine S s'il existe un morphisme birationnel allant de S' vers S . Considérons S_1 et S_2 deux surfaces dominant S et pour $i \in \{1, 2\}$, $\pi_i : S_i \rightarrow S$ leurs morphismes respectifs vers S . Nous disons que deux points $p_1 \in S_1$ et $p_2 \in S_2$ sont équivalents si $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ est un isomorphisme local sur un voisinage de p_2 et envoie p_2 sur p_1 . L'espace des bulles (« Bubble space » en anglais), noté $\mathcal{B}(S)$, est l'union de tous les points de toutes les surfaces dominant S modulo cette relation d'équivalence.

1.A.a. Espace de Picard-Manin

Nous considérons le groupe de Néron-Severi associé à S et tensorisé par \mathbb{R} . Nous le notons encore $N^1(S)$. C'est donc le groupe des diviseurs à coefficients réels sur S à équivalence numérique près. Il est muni d'une forme bilinéaire symétrique, la forme d'intersection. Pour tout diviseur D sur S nous notons $\{D\}_S$ sa classe de Néron-Severi ou $\{D\}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la surface. Si $\pi : S' \rightarrow S$ est un morphisme birationnel entre deux surfaces, alors le tiré en arrière

$$\pi^* : N^1(S) \hookrightarrow N^1(S')$$

qui à la classe d'un diviseur associe la classe de sa transformée totale, est un morphisme injectif qui préserve la forme d'intersection. Considérons la limite inductive des groupes de Néron-Severi des surfaces S' dominant S :

$$\mathcal{Z}_C(S) = \lim_{S' \rightarrow S} N^1(S'),$$

où l'indice C fait référence aux b-diviseurs de Cartier (pour plus de précisions voir [Fav10]).

Soit E_p le diviseur exceptionnel obtenu lors de l'éclatement de la surface S au point p . Notons S_p la surface obtenue. Nous notons e_p la classe du diviseur E_p dans $\mathcal{Z}_C(S)$, c'est-à-dire sur toute surface dominant S_p , e_p correspond à la transformée totale de E_p sur cette surface. Par la suite, nous nous intéressons au complété L^2 de $\mathcal{Z}_C(S)$, appelé l'espace de Picard-Manin (voir [CL13] et [Can11] ou encore [BFJ08]) :

$$\mathcal{Z}(S) = \left\{ \{D_0\}_S + \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} \lambda_p e_p \mid \lambda_p \in \mathbb{R}, \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} \lambda_p^2 < \infty \text{ et } \{D_0\}_S \in N^1(S) \right\}.$$

Ses éléments sont appelés « classes de Picard-Manin » ou plus simplement « classes ». Les classes e_p où p est un point de S ou d'une surface dominant S , sont d'auto-intersection -1 , orthogonales deux à deux et orthogonales à $N^1(S)$. La forme d'intersection est bien définie sur $\mathcal{Z}(S)$ et elle est de signature $(1, \infty)$.

Dans le cas où la surface considérée est \mathbb{P}^2 , nous notons simplement \mathcal{Z} l'espace de Picard-Manin associé :

$$\mathcal{Z} = \left\{ n\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \mid n, \lambda_p \in \mathbb{R}, \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p^2 < \infty \right\},$$

où ℓ est la classe de la droite dans \mathbb{P}^2 .

1.A.b. Espace hyperbolique

Considérons l'espace

$$\mathbb{H}^\infty(S) = \{c \in \mathcal{Z}(S) \mid c \cdot c = 1 \text{ et } c \cdot d_0 > 0\},$$

où $d_0 \in N^1(S)$ est une classe ample. C'est un espace hyperbolique de dimension infinie une fois muni de la distance définie par $d(c, c') = \text{argcosh}(c \cdot c')$ pour tous $c, c' \in \mathbb{H}^\infty(S)$. Nous nous intéressons plus particulièrement à $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{P}^2)$ que nous notons \mathbb{H}^∞ . Tout élément de \mathbb{H}^∞ est de la forme

$$n\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \text{ où } n > 0 \text{ et } n^2 - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p^2 = 1.$$

1.A.c. Action du groupe de Cremona sur l'espace de Picard-Manin

Considérons une résolution de $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$:

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2. \end{array}$$

Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ agit sur \mathcal{Z} (et en particulier sur \mathbb{H}^∞) via l'application $(f, c) \mapsto f_\#(c)$ où $f_\#$ est définie par

$$f_\# = \sigma_\# \circ (\pi_\#)^{-1}.$$

Plus précisément, soit d le degré de f et notons p_0, p_1, \dots, p_{r-1} ses points-base de multiplicités respectives $\{m_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$, q_0, q_1, \dots, q_{r-1} ceux de f^{-1} de multiplicités $\{m'_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$ et $a_{i,j}$ le nombre d'intersection des transformées totales des diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant respectivement les points p_j et q_i , dans la résolution de f . Notons également $\text{Bs}(f)$ l'ensemble des points base de f . Considérons une classe c de l'espace de Picard-Manin \mathcal{Z} :

$$c = n\ell - \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i e_{p_i} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \text{Bs}(f)}} \lambda_p e_p.$$

L'action de f sur c est donnée par la formule :

$$f_\#(c) = \left(nd - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j m_j \right) \ell - \sum_{i=0}^{r-1} \left(nm'_i - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j a_{i,j} \right) e_{q_i} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \text{Bs}(f)}} \lambda_p f_\#(e_p). \quad (1.1)$$

1.A.d. Bord à l'infini de l'espace hyperbolique

L'espace \mathbb{H}^∞ étant un espace métrique complet $\text{CAT}(0)$, il existe une notion de *bord à l'infini* qui généralise celle de bord des variétés riemanniennes de dimension finie qui sont complètes, simplement connexes et à courbure négative ou nulle. Plus de détails se trouvent dans [BH99, Chapter II.8], par exemple. Le bord de \mathbb{H}^∞ peut être défini comme suit.

$$\partial_\infty \mathbb{H}^\infty = \{c \in \mathcal{Z} \mid c \cdot c = 0 \text{ et } c \cdot \ell > 0\}.$$

Un point appartenant au bord de \mathbb{H}^∞ est parfois appelé *un point à l'infini*. Les isométries de \mathbb{H}^∞ s'étendent de façon unique en des homéomorphismes de $\mathbb{H}^\infty \cup \partial_\infty \mathbb{H}^\infty$.

1.B. Pavage de Voronoï

Nous rappelons brièvement ici la construction du pavage de Voronoï que nous avons faite dans [Lon19]. Nous en aurons besoin dans la section 3 où nous construisons des graphes associés à ce pavage.

Considérons deux surfaces S et S' . Soient $p \in S$ et $q \in S'$. Nous disons que q est *adhérent* à p , noté $q \rightarrow p$, s'il existe un morphisme birationnel $\pi : S' \rightarrow S$ tel que p est un point éclaté par π^{-1} et q appartient à la transformée stricte du diviseur exceptionnel E_p obtenu en éclatant p .

Pour construire le pavage de Voronoï, nous nous sommes dans un premier temps restreint à un sous-espace, noté \mathcal{E} , de \mathbb{H}^∞ contenant l'enveloppe convexe de l'orbite de ℓ sous l'action du groupe de Cremona.

Définition 1.2 ([Lon19, Définition 2.1]). L'ensemble \mathcal{E} est le sous-espace de \mathbb{H}^∞ constitué des classes

$$c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \quad (n \text{ réel } \geq 1)$$

satisfaisant :

- 1) $\lambda_p \geq 0$ pour tout $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$,
 2) la *positivité contre la classe anti-canonique* :

$$3n - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p \geq 0,$$

- 3) la *positivité des excès* de tout point $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$:

$$\lambda_p - \sum_{\substack{q \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ q \rightarrow p}} \lambda_q \geq 0,$$

- 4) la *condition de Bézout* : pour toute courbe de \mathbb{P}^2 de degré d passant avec multiplicité μ_p en chaque point $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$:

$$nd - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p \mu_p \geq 0.$$

Le groupe de Cremona agit sur \mathcal{E} . Nous avons montré que les cellules de Voronoï recouvrent l'espace \mathcal{E} ([Lon19, Corollaire 2.11]) et forment ainsi un pavage. Nous avons ensuite étudié la géométrie de ce pavage en caractérisant les germes des cellules adjacentes et quasi-adjacentes (Théorèmes 0.1 et 0.2).

1.C. Longueur d'une application du groupe de Cremona

J. Blanc et J-P. Furter construisent dans [BF19] un algorithme pour décomposer une application f du groupe de Cremona en un nombre minimal d'applications de caractéristique Jonquières (ou de « Jonquières généralisées » dans leur terminologie). Ce nombre est appelé « la longueur » de l'application f et est noté $\ell g(f)$. Ils appellent « prédécesseur » de f une application de caractéristique Jonquières j_1 telle que $f \circ j_1$ est de degré minimal : pour toute application de caractéristique Jonquières j ,

$$\deg(f \circ j_1) \leq \deg(f \circ j).$$

Ils montrent que composer une application avec un prédécesseur fait strictement diminuer le degré et que la longueur d'une application peut être réalisée à l'aide de prédécesseurs.

Théorème 1.3 ([BF19, Theorem 1 and Lemma 1.3]). *Pour tout $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, il existe une décomposition minimale en applications de caractéristique Jonquières :*

$$f = j_n \circ \dots \circ j_1$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ les points-base de j_i sont inclus dans les points-base de $f \circ j_1^{-1} \circ \dots \circ j_{i-1}^{-1}$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\deg(f \circ j_1^{-1} \circ \dots \circ j_i^{-1}) < \deg(f \circ j_1^{-1} \circ \dots \circ j_{i-1}^{-1}),$$

où $j_0 = \text{id}$.

1.D. Critère de Gromov-hyperbolicité

Le théorème suivant est un critère pratique pour montrer qu'un graphe est Gromov-hyperbolique, notamment lorsque nous ne connaissons pas les géodésiques du graphe étudié (comme c'est le cas dans la sous-section 3.C).

Théorème 1.4 (Critère de Bowditch [Bow14]). *Soient $h \geq 0$ et Γ un graphe connexe muni de la distance standard. Supposons que pour tous x et y appartenant à l'ensemble des sommets $S(\Gamma)$, il existe un sous-graphe $\Gamma(x, y)$ de Γ connexe par arcs vérifiant :*

- 1) Pour tout $x, y \in S(\Gamma)$, $x, y \in \Gamma(x, y)$.
- 2) Pour tout $x, y, z \in S(\Gamma)$, $\Gamma(x, y) \subseteq \mathcal{N}_h(\Gamma(x, z) \cup \Gamma(y, z))$ où \mathcal{N}_h signifie le h -voisinage tubulaire.
- 3) Pour tout $x, y \in S(\Gamma)$ tels que $d(x, y) \leq 1$, le diamètre de $\Gamma(x, y)$ dans Γ est au plus h .

Alors Γ est δ -hyperbolique avec δ dépendant de h .

Cette propriété est stable par quasi-isométrie.

Définition ([BH99, Définition 8.14]). Soient deux espaces métriques (X, d_X) et $(X', d_{X'})$. Une application $g : X \rightarrow X'$ est un *plongement quasi-isométrique* s'il existe deux constantes $K \geq 1$ et $L \geq 0$ telles que pour tout $x, y \in X$:

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) - L \leq d_{X'}(g(x), g(y)) \leq K d_X(x, y) + L.$$

Si de plus il existe une constante C telle que tout élément de X' appartient au C -voisinage de l'image de g , g est une *quasi-isométrie*. Dans ce cas, les espaces métriques X et X' sont dits *quasi-isométriques*.

Théorème 1.5 (voir par exemple [GdlH90, Théorème p.88]). Soient (X, d_X) et $(X', d_{X'})$ deux espaces métriques géodésiques quasi-isométriques. L'espace X est Gromov-hyperbolique si et seulement si l'espace X' est Gromov-hyperbolique.

2. Graphe de Wright

En 1992, D. Wright a introduit dans son article [Wri92] un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 sur lequel le groupe de Cremona de rang 2 sur un corps algébriquement clos agit. Il permet de voir ce groupe comme un produit amalgamé de trois de ses sous-groupes le long de leurs intersections. Dans ce chapitre, nous définissons ce complexe et montrons que le graphe sous-jacent n'est pas Gromov-hyperbolique. Ceci répond par la négative à une question posée par A. Minasyan et D. Osin dans [MO15]. Par conséquent, de ce point de vue-là ce n'est pas un analogue du complexe des courbes ou de l'arbre de Bass-Serre.

2.A. Définition

Une *surface rationnelle marquée* est un couple (S, φ) où S est une surface rationnelle et $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ est une application birationnelle. L'application φ est appelée *marquage*. Soit $n \geq 0$, une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n est une fibration au-dessus de \mathbb{P}^1 dont les fibres sont isomorphes à \mathbb{P}^1 et sont d'auto-intersection 0, telle qu'il existe une section appelée *section exceptionnelle* d'auto-intersection $-n$. Lorsque $n > 0$, cette dernière est unique. Considérons les surfaces rationnelles marquées (S, ϕ) où S est isomorphe à \mathbb{P}^2 ou à une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n , pour $n \geq 0$. Nous disons que deux telles surfaces rationnelles marquées (S_1, ϕ_1) et (S_2, ϕ_2) sont équivalentes si elles satisfont l'une des deux conditions suivantes (voir Figure 1) :



Figure 1: Couples équivalents

- 1) $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est un isomorphisme,

2) S_1 et S_2 sont des surfaces de Hirzebruch d'indices $n_1, n_2 > 0$ et $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ préserve la fibration.

Nous notons $\overline{(S, \phi)}$ une telle classe d'équivalence. Ce sont les sommets du complexe de Wright. Il y a trois types de sommets dépendant de la surface S :

- S est isomorphe à \mathbb{P}^2 ,
- S est isomorphe à \mathbb{F}_n , pour $n \geq 1$,
- S est isomorphe à \mathbb{F}_0 .

Tout sommet dont la surface S est isomorphe à \mathbb{F}_n pour $n \geq 1$ possède un représentant ayant \mathbb{F}_1 comme surface. Remarquons que si deux couples (\mathbb{F}_1, ϕ_1) et (\mathbb{F}_1, ϕ_2) sont équivalents alors $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est soit un automorphisme, soit vérifie :

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 = \pi^{-1} \circ j_{\text{onq}} \circ \pi$$

où π^{-1} est l'éclatement d'un point $p \in \mathbb{P}^2$, j_{onq} est une application de Jonquières préservant le pinceau de droites passant par le point p .

Trois sommets de type respectivement \mathbb{P}^2 , \mathbb{F}_n avec $n > 0$ et \mathbb{F}_0 forment un triangle s'il existe des représentants respectifs (\mathbb{P}^2, ϕ_1) , (\mathbb{F}_1, ϕ_2) et (\mathbb{F}_0, ϕ_3) qui vérifient les conditions (voir le diagramme commutatif 2) :

- a) $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ est une contraction,
- b) $\phi_3^{-1} \circ \phi_2$ est la composée de l'éclatement d'un point hors de la section exceptionnelle par la contraction de la fibre passant par ce point,
- c) $\phi_3^{-1} \circ \phi_1$ est la composée de deux éclatements de points de \mathbb{P}^2 par la contraction de la droite passant par ces deux points.

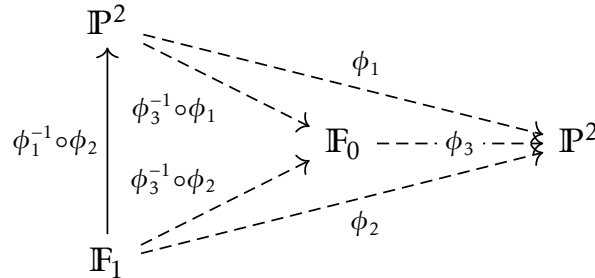


Figure 2: Sommets réalisant un triangle.

Ce complexe de dimension 2 est simplement connexe ([Wri92, Theorem 5.5]) mais il n'est pas contractile puisqu'il contient des sphères de dimension 2 comme par exemple celle de la figure 3 où σ est l'involution standard de Cremona, π_p est l'éclatement du point $p \in \mathbb{P}^2$ et $\tau_{p,q}^{-1}$ éclate les points $p \in \mathbb{P}^2$ et $q \in \mathbb{P}^2$ puis contracte la droite passant par ces deux points.

Le groupe de Cremona agit sur les sommets du complexe de Wright par post-composition : pour toute application $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ et pour tous représentants (S, ϕ) d'un sommet

$$f \cdot (S, \phi) = (S, f \circ \phi).$$

Remarquons que l'action de f préserve la relation d'équivalence sur les sommets et ainsi l'action sur les sommets est bien définie. De plus, le groupe de Cremona agit par isométries et conserve la structure du complexe. Le domaine fondamental de cette action sur le complexe de Wright est un triangle. Le graphe de Wright est le 1-squelette de ce complexe. Il est muni de la métrique standard où les arêtes sont isométriques au segment réel $[0, 1]$. Nous le notons \mathcal{W} .

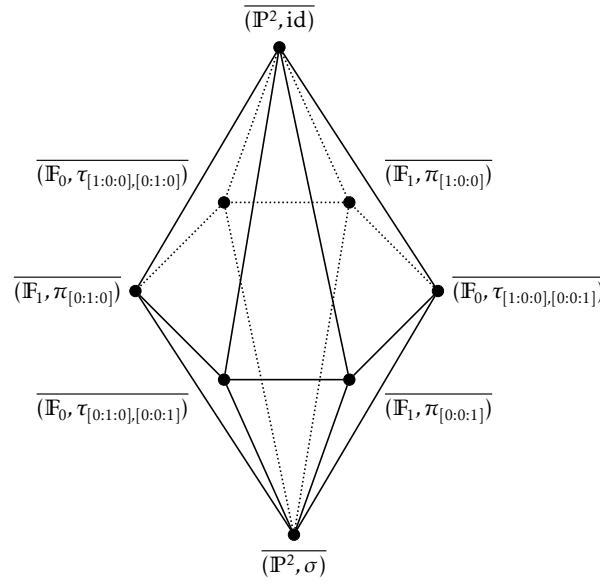


Figure 3: Une sphère de dimension 2 dans le complexe.

2.B. Graphe de Wright modifié

Considérons le graphe \mathcal{G} défini comme suit et appelé *graphe de Wright modifié*. Ses sommets sont les sommets de type \mathbb{P}^2 du graphe de Wright et nous relierons deux sommets s'ils étaient à distance deux dans le graphe de Wright. Comme nous n'avons plus qu'un type de sommet, nous pouvons oublier la surface et ne considérer que le marquage. Ainsi, les sommets de ce graphe correspondent aux applications du groupe de Cremona munies de la relation d'équivalence définie pour le complexe de Wright, c'est-à-dire :

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{il existe } a \in \text{PGL}(3, k) \text{ tel que } f = g \circ a.$$

Une telle classe est notée \bar{f} .

Dans le graphe de Wright, si deux sommets de type \mathbb{P}^2 sont à distance deux parce qu'il existe un sommet de type \mathbb{F}_0 à distance un de chacun d'eux, alors il existe également deux sommets distincts de type \mathbb{F}_n possédant cette propriété. Il est donc suffisant de s'intéresser aux applications stabilisant les sommets de type \mathbb{F}_n . Le stabilisateur d'un sommet de type \mathbb{F}_n dans le graphe de Wright est un conjugué du groupe de Jonquières. Ainsi, dans le graphe de Wright modifié il existe une arête entre deux sommets \bar{f} et \bar{g} si et seulement s'il existe deux représentants f et g de \bar{f} et \bar{g} tels que l'un soit obtenu en pré-composant l'autre par un élément j appartenant à la classe d'une application de Jonquières :

$$g = f \circ j.$$

Montrons que cette définition est indépendante du choix des représentants. En effet, considérons deux autres représentants $f \circ a$ et $g \circ b$ où $a, b \in \text{PGL}(3, k)$ de \bar{f} et \bar{g} . Nous avons alors :

$$g \circ b = (f \circ a) \circ (a^{-1} \circ j \circ a) \circ (a^{-1} \circ b).$$

Comme $a^{-1} \circ b$ est un automorphisme et que $a^{-1} \circ j \circ a$ est une application de Jonquières, la composée $(a^{-1} \circ j \circ a) \circ (a^{-1} \circ b)$ appartient à la classe d'une application de Jonquières comme annoncé.

Remarque 2.1. La distance entre deux sommets \bar{f} et \bar{g} est donnée par la longueur de l'application $f^{-1} \circ g$ introduit par J. Blanc et J-P. Furter dans [BF19].

Remarquons que le graphe de Wright modifié est quasi-isométrique au graphe de Cayley du groupe de Cremona pour la famille de générateurs constituée des transformations de Jonquières et des automorphismes de \mathbb{P}^2 .

La proposition suivante justifie le fait que nous nous concentrons sur le graphe de Wright modifié plutôt que sur le graphe de Wright.

Proposition 2.2. *L'inclusion du graphe de Wright modifié dans le graphe de Wright donnée par l'application $\text{id} : \bar{f} \mapsto (\mathbb{P}^2, f)$ est une quasi-isométrie.*

Démonstration. Notons $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{W})$ les ensembles des sommets des graphes \mathcal{G} et \mathcal{W} . Remarquons que dans le cas des graphes, il suffit de montrer qu'il existe une quasi-isométrie entre les sommets. En effet, tout point d'une arête est à distance au plus $\frac{1}{2}$ d'un sommet. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \text{id} : \mathcal{S}(\mathcal{G}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{W}) \\ \bar{f} &\mapsto (\mathbb{P}^2, f). \end{aligned}$$

Par définition des sommets des deux graphes, elle est bien définie. Montrons que c'est un plongement quasi-isométrique.

Remarquons, que dans le graphe de Wright, toute géodésique reliant deux sommets différents de type \mathbb{P}^2 passe alternativement par des sommets de type \mathbb{P}^2 et des sommets de type \mathbb{F}_0 ou \mathbb{F}_1 . Donc la distance entre deux sommets de type \mathbb{P}^2 est paire dans le graphe de Wright. De plus, par définition du graphe de Wright modifié, tout sommet de type \mathbb{P}^2 à distance 2 dans le graphe de Wright correspond à un sommet à distance 1 dans le graphe de Wright modifié. Ainsi, pour tous $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, nous avons :

$$d_{\mathcal{W}}(\overline{(\mathbb{P}^2, f)}, \overline{(\mathbb{P}^2, g)}) = 2 d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{g}).$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{2} d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{g}) \leq d_{\mathcal{W}}(\overline{(\mathbb{P}^2, f)}, \overline{(\mathbb{P}^2, g)})$$

et que l'application id est un plongement quasi-isométrique. De plus, par construction tout sommet dans le graphe de Wright est à distance au plus 1 d'un sommet de type \mathbb{P}^2 donc tout sommet du graphe de Wright est à distance au plus 1 de l'image de id . Ceci achève la preuve. \square

2.C. Diamètre infini

Une première question est de savoir si le diamètre du graphe modifié est infini ou non. S'il était de diamètre fini alors il serait trivialement δ -hyperbolique avec δ égal au diamètre. Dans cette section, nous montrons que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini. Pour toute application $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, nous notons $\#_{\text{md}}(f)$ le nombre de multiplicités distinctes des points-base de f .

Lemme 2.3. *Soient $g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ et j une application de caractéristique Jonquières. Le nombre de multiplicités distinctes des points-base de $g \circ j$ est inférieur ou égal à*

$$\#_{\text{md}}(g \circ j) \leq 2 \#_{\text{md}}(g) + 2.$$

Démonstration. Les points-base de $g \circ j$ sont inclus dans l'ensemble des points suivants :

- 1) l'image par j^{-1} des points-base de g qui ne sont pas des points-base de j^{-1} ,
- 2) les points-base de j .

Dans le cas 1), appliquer j^{-1} ne modifie pas le nombre de multiplicités distinctes de ces points. En effet, la multiplicité de chacun de ces points-là est la même pour l'application j ou pour l'application $g \circ j$. Ce n'est pas le cas des points de 2) qui ne possèdent pas la même multiplicité en tant que points-base de j ou de $g \circ j$. Notons $m_p(f)$ la multiplicité du point p en tant que point-base de $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ avec pour convention

qu'elle est égale à 0 si p n'est pas un point-base de f . Notons p_0 le point-base de multiplicité maximale de j qui est également celui de j^{-1} , et p_1, \dots, p_{2d-2} et q_1, \dots, q_{2d-2} les petits points-base respectifs de j et j^{-1} . Alors, en utilisant la formule (1.1) (l'application f de la formule est remplacée par j^{-1} et c par $g_{\#}^{-1}(\ell)$), nous obtenons pour tout $1 \leq i \leq 2d-2$:

$$m_{p_i}(g \circ j) = \deg(g) - m_{p_0}(g) - m_{q_i}(g). \quad (2.4)$$

C'est la position des points-base de j^{-1} par rapport aux points-base de g qui va déterminer le nombre de multiplicités différentes pour les points-base de $g \circ j$. Nous allons avoir au maximum :

- une multiplicité qui correspond au point-base maximal de j ,
- une autre qui correspond au fait que certains petits points-base de j^{-1} ne sont pas des points-base de g (d'après la formule (2.4), cette multiplicité est égale au degré de g si p_0 n'est pas un point-base de g et à $\deg(g) - m_{p_0}(g)$ sinon),
- $\#_{\text{md}}(g)$ multiplicités différentes qui correspondent aux petits points-base de j^{-1} qui sont aussi des points-base de g dont les multiplicités sont données par la formule (2.4),
- $\#_{\text{md}}(g)$ multiplicités différentes qui correspondent aux points-base de $g \circ j$ qui sont images par j^{-1} des points-base de g (qui ne sont pas des points-base de j). Remarquons que pour ces points-là leur multiplicité pour g ou pour $g \circ j$ est identique.

Ainsi, l'ensemble des points-base de l'application $g \circ j$ possède au plus $2\#_{\text{md}}(g) + 2$ multiplicités différentes. \square

Lemme 2.5. *Soit $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'applications de Jonquières. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de multiplicités distinctes des points-base de $j_1 \circ j_2 \circ \dots \circ j_n$ est inférieur ou égal à $2^{n+1} - 2$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Une application de Jonquières ne possède que deux multiplicités distinctes donc le cas $n = 1$ est vérifié. Supposons que le résultat soit vrai pour la composée de n applications de Jonquières, montrons qu'il reste vrai pour $j_1 \circ \dots \circ j_{n+1}$, la composée de $n+1$ applications de Jonquières. Notons $g = j_1 \circ \dots \circ j_n$. Par hypothèse de récurrence et par le lemme 2.3, le nombre de multiplicités différentes est au maximum $2 + 2(2^{n+1} - 2) = 2^{n+2} - 2$ comme annoncé. \square

Proposition 2.6. *Le graphe de Wright modifié est de diamètre infini.*

Démonstration. Nous allons montrer par l'absurde que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini. Supposons que le diamètre D de \mathcal{G} soit fini. Choisissons un entier n tel que $n > 2^{D+1} - 2$. Considérons une suite d'applications quadratiques $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, les points-base de q_i^{-1} sont disjoints des points-base de $q_1 \circ \dots \circ q_{i-1}$. La caractéristique de cette application est $(2^n; m_n^3, \dots, m_1^3)$ où $m_i = 2^i$. Cela découle du fait que si les points-base de f^{-1} sont disjoints des points-base de g alors les points-base de $g \circ f$ sont les points-base de f dont la multiplicité a été multipliée par $\deg(g)$ et l'image par f^{-1} des points-base de g qui conservent la même multiplicité. De plus, le degré de $g \circ f$ est égal au produit des degrés de f et de g . En particulier, l'application $q_1 \circ \dots \circ q_n$ possède n multiplicités distinctes. D'après le lemme 2.5, cela signifie que le nombre minimal d'applications de Jonquières permettant de décomposer $q_1 \circ \dots \circ q_n$ est strictement supérieur à D . Ceci implique que $d_{\mathcal{G}}(\text{id}, \overline{q_1 \circ \dots \circ q_n}) > D$ ce qui contredit le fait que le diamètre est borné. \square

Le corollaire suivant est dû à la quasi-isométrie du graphe de Wright et du graphe de Wright modifié.

Corollaire 2.7. *Le graphe de Wright est de diamètre infini.*

2.D. Non-hyperbolicité

Nous montrons dans cette section que le graphe de Wright modifié n'est pas Gromov-hyperbolique. Pour cela, nous montrons qu'il existe un plongement quasi-isométrique du graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 dans le graphe de Wright modifié. Nous utilisons un sous-groupe du groupe de Cremona isomorphe à \mathbb{Z}^2 , constitué de deux applications particulières de la famille des twists d'Halphen.

2.D.a. Construction d'un sous-groupe abélien libre de rang huit

Les surfaces de Halphen sont construites de la façon suivante (voir [Can18, p.24] ou encore [Lon17, Section 3.4.1]). Soit C_0 une cubique lisse de \mathbb{P}^2 . Fixons la loi de groupe sur C_0 de sorte que le neutre soit un point d'inflexion. Choisissons 9 points sur cette courbe de sorte que la somme de ces points soit égale au neutre. Ainsi, nous avons un pinceau de courbes elliptiques passant par ces 9 points. En les éclatant, nous obtenons une fibration sur \mathbb{P}^1 et dont les fibres sont les transformées strictes de ce pinceau. La surface obtenue est appelée « surface de Halphen ».

Soit X une surface de Halphen obtenue en éclatant les points p_0, \dots, p_8 de \mathbb{P}^2 . Le groupe de Néron-Severi de X est engendré dans l'espace de Picard-Manin par :

$$\text{Pic}(X) = \langle \ell, e_{p_0}, \dots, e_{p_8} \rangle.$$

La classe du diviseur canonique de la surface X est égale à

$$K_X = -3\ell + e_{p_0} + \dots + e_{p_8}.$$

De plus,

$$K_X^\perp / \langle K_X \rangle = \langle e_{p_1} - e_{p_0}, e_{p_2} - e_{p_0}, \dots, e_{p_8} - e_{p_0} \rangle \simeq \mathbb{Z}^8.$$

D'après [CD12, Theorem 2.10], le groupe des automorphismes de X contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^8 . Notons $\{f_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ un système générateur de ce sous-groupe. Soit $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement des points p_0, \dots, p_8 , les applications du groupe de Cremona $\{\pi \circ f_i \circ \pi^{-1}\}_{1 \leq i \leq 8}$ engendrent un sous-groupe du groupe de Cremona isomorphe à \mathbb{Z}^8 . Remarquons que pour $1 \leq i \leq 8$, les applications $\pi \circ f_i \circ \pi^{-1}$ notées g_i possèdent au plus 9 points-base. C'est également le cas de toutes les applications de ce \mathbb{Z}^8 .

2.D.b. Non-hyperbolicité du graphe de Wright

Dans cette sous-section, nous considérons deux générateurs du sous-groupe abélien de rang 8 construit précédemment. Nous montrons que le graphe de Cayley du sous-groupe \mathbb{Z}^2 obtenu se plonge quasi-isométriquement dans le graphe de Wright modifié.

Nous avons besoin de la proposition suivante tirée de [CD12, (II) p.874].

Proposition 2.8. *À chaque élément de $a \in K_X^\perp / \langle K_X \rangle$ est associé un automorphisme de X , et donc une isométrie τ_a de $\text{Pic}(X)$ via la formule :*

$$\begin{aligned} \tau_a : \text{Pic}(X) &\rightarrow \text{Pic}(X) \\ d &\mapsto d - (K_X \cdot d)a + (a \cdot d - \frac{1}{2}(K_X \cdot d)(a \cdot a))K_X \end{aligned}$$

En fait, les applications f_i du paragraphe précédent peuvent être choisies de façon à correspondre à la translation $\tau_{e_{p_i} - e_{p_0}}$.

Corollaire 2.9. *Soient g_1 et g_2 les deux applications construites précédemment. Alors pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ nous avons :*

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = 9(n^2 + m^2 + mn) + 1.$$

Démonstration. Les deux applications g_1 et g_2 se relèvent en des automorphismes de X correspondant respectivement aux translations $\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}$ et $\tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}$. L'itérée de g_1 se relève en l'itérée de la translation correspondante. De plus, traduire n fois par $e_{p_1} - e_{p_0}$ revient à traduire une fois par $n(e_{p_1} - e_{p_0})$, ainsi :

$$\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n = \tau_{n(e_{p_1} - e_{p_0})}.$$

De même, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la translation correspondant à $g_1^n \circ g_2^m$ est égale à

$$\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n \circ \tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}^m = \tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}.$$

De plus, la surface X domine la surface de résolution minimale de $g_1^n \circ g_2^m$ ainsi les actions de $g_1^n \circ g_2^m$ et de $\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n \circ \tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}^m$ sur l'espace de Picard-Manin coïncident. Par conséquent, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = \tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}(\ell) \cdot \ell.$$

Par la proposition 2.8, nous avons :

$$\tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}(\ell) = \ell + 3(ne_{p_1} + me_{p_2} - (n+m)e_{p_0}) - 3(n^2 + m^2 + nm)K_X.$$

Ainsi nous obtenons que le degré de $g_1^n \circ g_2^m$ est égal à

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = 9(n^2 + m^2 + nm) + 1,$$

comme annoncé. \square

Le lemme suivant est une adaptation du lemme de J. Blanc et S. Cantat ([BC16, Lemma 5.10]). Je remercie J. Blanc de m'avoir fait remarquer qu'il s'adaptait dans ce cas-là. Dans leur preuve, il suffit de considérer le diviseur canonique associé à la surface obtenue en éclatant 9 points contenant l'ensemble $\text{Bs}(f_2) \cup \text{Bs}(f_1^{-1})$.

Lemme 2.10. *Si f_1 et f_2 sont deux applications du groupe de Cremona telles que le cardinal de $\text{Bs}(f_2) \cup \text{Bs}(f_1^{-1})$ est inférieur ou égal à 9 alors elles satisfont l'inégalité :*

$$\sqrt{\deg(f_2 \circ f_1)} \leq \sqrt{\deg(f_2)} + \sqrt{\deg(f_1)}.$$

Le lemme suivant est extrait de [BF19, Lemme 4.22].

Lemme 2.11. *Soit $h \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telle que h possède au plus 9 points-base. Nous avons alors :*

$$\deg(h) \leq 5 \ell g(h)^2.$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur la longueur de l'application. Supposons que h soit de longueur 1, ce qui signifie que h est une application de caractéristique Jonquières qui possède au plus 9 points-base. Par conséquent h est de degré inférieur ou égal à 5. Supposons le résultat vrai pour toute application de longueur inférieure ou égale à $k-1$ et possédant au plus 9 points-base. Montrons le résultat pour une application h de longueur k et ayant au plus 9 points-base. D'après le théorème 1.3, nous pouvons décomposer h de façon minimale $h = j_k \circ \dots \circ j_1$ à l'aide d'applications de caractéristique Jonquières j_1, \dots, j_k de sorte que les points-base de j_1 soient inclus dans les points-base de h . Notons $h_2 = a \circ j_k \circ \dots \circ j_2$. Cette application est de longueur $k-1$ et se réécrit : $h_2 = h \circ j_1^{-1}$. L'ensemble des points-base de h_2 est inclus dans l'ensemble E de points suivant :

- l'ensemble des points-base de j_1^{-1} ,
- l'image par j_1 des points-base de h qui ne sont pas des points-base de j_1 .

L'ensemble des points-base de j_1 étant inclus dans celui des points-base de h , le cardinal de E est majoré par :

$$\text{Card}(E) \leq \text{Card}(\text{Bs}(j_1^{-1})) + \text{Card}(\{p \in \text{Bs}(h) \mid p \notin \text{Bs}(j_1)\}) = \text{Card}(h) \leq 9.$$

Par conséquent le cardinal de l'ensemble $\text{Bs}(h_2) \cup \text{Bs}(j_1^{-1})$ est inférieur ou égal à 9. D'après le lemme 2.10, le degré de la composée satisfait :

$$\sqrt{\deg(h_2 \circ j_1)} \leq \sqrt{\deg(h_2)} + \sqrt{\deg(j_1)}.$$

Comme les applications j_1 et h_2 ont toutes deux au plus 9 points-base, nous concluons en utilisant le fait que le degré de j_1 est inférieur ou égal à 5 et par hypothèse de récurrence. \square

Théorème 2.12. *Le graphe de Wright modifié possède un sous-graphe quasi-isométrique au graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 , noté $\mathcal{GC}(\mathbb{Z}^2)$. Plus précisément, en considérant les applications $g_1, g_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ construites précédemment, l'inclusion :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{GC}(\langle g_1, g_2 \rangle) &\rightarrow \mathcal{G} \\ f &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie sur son image.

Démonstration. Un élément du groupe $\langle g_1, g_2 \rangle$ s'écrit $g_1^m \circ g_2^n$ où $m, n \in \mathbb{Z}$. Prouvons que c'est une quasi-isométrie plongée. Par transitivité du groupe $\langle g_1, g_2 \rangle$, nous pouvons supposer qu'un des sommets est id. Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, la distance $d_{\mathcal{G}}((g_1^m \circ g_2^n)(\bar{\text{id}}), \bar{\text{id}})$ correspond à la longueur de l'application $g_1^m \circ g_2^n$. Ces applications ont au plus 9 points-base, par conséquent nous pouvons leur appliquer le lemme 2.11 :

$$\deg(g_1^m \circ g_2^n) \leq 5 \ell g(g_1^m \circ g_2^n)^2. \quad (2.13)$$

D'après le corollaire 2.9, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$5(n+m)^2 \leq 9(n^2 + m^2 + mn) + 1 = \deg(g_1^m \circ g_2^n).$$

Ceci prouve que

$$d_{\mathcal{GC}(\mathbb{Z}^2)}(g_1^m \circ g_2^n, \text{id}) \leq d_{\mathcal{G}}((g_1^m \circ g_2^n)(\bar{\text{id}}), \bar{\text{id}}).$$

De plus, en notant $K = \max(\ell g(g_1), \ell g(g_2))$ le maximum entre la longueur de g_1 et la longueur de g_2 nous obtenons :

$$\frac{1}{K} d_{\mathcal{G}}((g_1^m \circ g_2^n)(\bar{\text{id}}), \bar{\text{id}}) \leq d_{\mathcal{GC}(\mathbb{Z}^2)}(g_1^m \circ g_2^n, \text{id}).$$

Enfin sur son image, l'application \mathcal{I} est une quasi-isométrie. □

Corollaire 2.14. *Le graphe de Wright modifié n'est pas Gromov-hyperbolique.*

Le théorème A découle de la proposition 2.2 et du corollaire précédent.

3. Graphes associés au pavage de Voronoï

Le but de cette partie est d'exhiber un graphe Gromov-hyperbolique naturel sur lequel le groupe de Cremona agit. Le premier candidat est « le graphe d'adjacence » qui est une sorte de graphe dual au pavage de Voronoï, codant la géométrie des cellules adjacentes. Nous montrons qu'il est quasi-isométrique au graphe de Wright modifié. Par conséquent, il est également quasi-isométrique au graphe de Wright. Cela permet de retrouver le graphe de Wright dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^∞ . Mais cela implique qu'il n'est pas Gromov-hyperbolique puisque nous avons montré que le graphe de Wright modifié ne l'est pas. Nous nous intéressons ensuite au graphe « quasi-adjacent » lié à la géométrie des cellules quasi-adjacentes. Nous montrons qu'il reste de diamètre infini et qu'il est Gromov-hyperbolique. Il peut ainsi être vu comme un analogue du graphe des courbes.

3.A. Graphe d'adjacence

Construisons le graphe d'adjacence. Les sommets de ce graphe sont les centres des cellules de Voronoï, c'est-à-dire l'orbite de ℓ sous l'action du groupe de Cremona :

$$\{f_*(\ell) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)\}.$$

Remarquons que comme le groupe $\text{PGL}(3, k)$ est le stabilisateur de la classe ℓ , les sommets du graphe d'adjacence sont en bijection avec les classes à gauche du groupe de Cremona modulo $\text{PGL}(3, k)$. Nous relierons deux sommets par une arête si les deux cellules de Voronoï correspondantes sont adjacentes entre

elles. Ce graphe est muni de la métrique standard et nous le notons \mathcal{A} . D'après le corollaire 0.1, les germes des cellules adjacentes à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ sont des applications de caractéristiques Jonquières ou sont des applications dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale. Par conséquent la distance entre les sommets $f_{\#}(\ell)$ et ℓ du graphe d'adjacence correspond au nombre minimal d'applications de ces deux types qu'il faut pour décomposer l'application f .

Remarque 3.1. Le graphe d'adjacence est quasi-isométrique au graphe de Cayley du groupe de Cremona avec pour famille de générateurs $\text{PGL}(3, k)$, les applications de Jonquières et les applications ayant au plus 8 points-base en position presque générale.

Proposition 3.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{S}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}) \\ f_{\#}(\ell) &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

entre les sommets du graphe d'adjacence $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ et les sommets du graphe de Wright modifié $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ est une quasi-isométrie. En particulier, le graphe de Wright \mathcal{W} , le graphe de Wright modifié \mathcal{G} et le graphe d'adjacence \mathcal{A} sont quasi-isométriques.

Démonstration. L'application \mathcal{I} est bien définie car les deux ensembles de sommets sont définis par les classes à gauche du groupe de Cremona modulo $\text{PGL}(3, k)$. Prouvons dans un premier temps que c'est un plongement quasi-isométrique. Le groupe de Cremona agissant transitivement sur les sommets des deux graphes, il suffit de montrer les deux inégalités sur les couples $(f_{\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell))$ où $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Rappelons que la distance d'un sommet \bar{f} du graphe de Wright modifié au sommet id est donnée par la longueur de l'application f (voir la remarque 2.1). Ainsi, nous avons :

$$d_{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell)) \leq d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \text{id}).$$

Les applications correspondant aux cellules adjacentes qui ne sont pas des applications de caractéristiques Jonquières sont de degré au plus 17 ([Lon19, Corollaire 4.9]). D'après le théorème 1.3, la longueur minimale d'une application peut être atteinte en composant des applications de caractéristique Jonquières de sorte que le degré augmente strictement à chaque étape. Ainsi, toute application de degré inférieur ou égal à 17 est la composée d'au plus 16 applications de caractéristique Jonquières. Par conséquent, nous avons :

$$d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \text{id}) \leq 16 d_{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell)).$$

Ceci achève de montrer que l'application \mathcal{I} est un plongement quasi-isométrique. De plus, les sommets des deux graphes sont en bijection donc \mathcal{I} est une quasi-isométrie. Cela implique que les graphes \mathcal{A} et \mathcal{G} sont quasi-isométriques. De plus, nous avons déjà montré que les graphes \mathcal{W} et \mathcal{G} sont quasi-isométriques (Proposition 2.2). \square

Cette proposition implique d'une part que le graphe d'adjacence construit est de diamètre infini et d'autre part qu'il n'est pas hyperbolique au sens de Gromov puisque le graphe de Wright modifié ne l'est pas (Théorème 1.5 et Corollaire 2.14).

3.B. Graphe de quasi-adjacence

Les sommets du graphe de quasi-adjacence $\bar{\mathcal{A}}$ sont les centres des cellules de Voronoï et nous relient deux sommets par une arête lorsque les cellules correspondantes sont quasi-adjacentes. Dans cette partie, nous étudions la Gromov-hyperbolicité du graphe de quasi-adjacence.

Par la remarque 0.3, le graphe d'adjacence est un sous-graphe du graphe de quasi-adjacence. D'après les théorèmes 0.1 et 0.2, les germes des sommets qui deviennent à distance un du sommet ℓ sont les applications birationnelles qui ne sont pas de caractéristique Jonquières et qui possèdent exactement 9 points-base en position presque générale. Ces applications fixent ou échangent les classes au bord de \mathbb{H}^{∞}

de la forme $3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$ où les points p_i sont en position presque générale (Lemme [Lon19, Lemme 5.15]). Ainsi, les éléments qui nous gênaient pour l'hyperbolicité du graphe d'adjacence deviennent elliptiques dans le graphe de quasi-adjacence. Il est par conséquent un bon candidat à être hyperbolique. Afin que cela soit intéressant, nous devons montrer qu'il reste de diamètre infini.

3.B.a. Diamètre infini

Nous avons vu que le graphe d'adjacence est de diamètre infini. Nous montrons que cela reste le cas pour le graphe de quasi-adjacence.

Proposition 3.3. *Le graphe de quasi-adjacence est de diamètre infini.*

Pour montrer cette proposition nous modifions légèrement la preuve faite pour montrer que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini (Proposition 2.6). Le lemme suivant est l'analogie du lemme 2.5.

Lemme 3.4. *Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'applications telle que pour tout n , f_n est soit une application de caractéristique Jonquières soit une application ayant au plus 9 points-base. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de multiplicités différentes de $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$ est inférieur ou égal à $2^{n+3} - 2$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Si $n = 1$, alors f est soit une application de caractéristique Jonquières soit une application ayant au plus 9 points-base. Dans le premier cas elle possède deux multiplicités différentes et dans le second cas elle en possède au plus 9. Dans les deux cas elle en possède moins de 14.

Supposons le résultat vrai pour $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$. Montrons qu'il reste vrai pour l'application $f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$. Notons $g = f_1 \circ \dots \circ f_n$. Si f_{n+1} est une application de caractéristique Jonquières alors d'après le lemme 2.3 et par hypothèse de récurrence, l'application $g \circ f_{n+1}$ possède au plus

$$2 + 2(2^{n+3} - 2) = 2^{n+4} - 2$$

multiplicités différentes.

Sinon f_{n+1} possède au plus 9 points-base et l'ensemble des points-base de $g \circ f_{n+1}$ est inclus dans l'ensemble de points suivant :

- 1) l'image par f_{n+1}^{-1} des points-base de g qui ne sont pas des points-base de f_{n+1}^{-1} ,
- 2) ainsi que des points-base de f_{n+1} .

La multiplicité des points du cas 1) est la même pour l'application f_{n+1} et pour l'application $g \circ f_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il y a au maximum 9 multiplicités distinctes correspondant aux points-base de f_{n+1} et $2^{n+3} - 2$ multiplicités différentes en plus correspondant aux points-base de g qui ne sont pas des points-base de f_{n+1}^{-1} . Cela implique que $f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$ possède au plus

$$2^{n+3} - 2 + 9 = 2^{n+3} - 7 \leq 2^{n+4} - 2$$

multiplicités différentes. Le résultat est ainsi démontré. \square

Preuve de la Proposition 3.3. Nous allons montrer par l'absurde que le graphe de quasi-adjacence est de diamètre infini. Supposons que le diamètre de $\bar{\mathcal{A}}$ soit de diamètre D borné. Choisissons un entier n strictement supérieur à $2^{D+3} - 2$:

$$n > 2^{D+3} - 2.$$

Considérons une suite d'applications quadratiques $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, les points-base de q_i^{-1} sont disjoints des points-bases de $q_1 \circ \dots \circ q_{i-1}$. Ainsi l'application $q_1 \circ \dots \circ q_n$ possède n multiplicités différentes (voir la preuve de la proposition 2.6). D'après le lemme 3.4, cela signifie que cette application se décompose en strictement plus de D applications qui sont ou de caractéristique Jonquières ou qui possèdent au plus 9 points-base. Ceci implique que $d_{\bar{\mathcal{A}}}(\text{id}_{\#}(\ell), (q_1 \circ \dots \circ q_n)_{\#}(\ell)) > D$ ce qui contredit le fait que le diamètre est borné. \square

3.C. Hyperbolicité du graphe de quasi-adjacence

Pour montrer que le graphe de quasi-adjacence est Gromov-hyperbolique nous utilisons le critère de Bowditch 1.4 et le fait que l'espace \mathcal{E} est Gromov-hyperbolique.

3.C.a. Construction de sous-graphes

Nous construisons des sous-graphes dont nous montrons qu'ils vérifient le critère de Bowditch.

Dans un premier temps, nous associons à tout élément de \mathcal{E} un sous-graphe du graphe de quasi-adjacence. Un choix naturel du point de vue du pavage de Voronoï est de faire correspondre à $c \in \mathcal{E}$ tous les sommets du graphe de quasi-adjacence correspondant aux cellules de Voronoï auxquelles c appartient :

$$\mathcal{S}_c := \{f_{\#}(\ell) \mid c \in \mathcal{V}(f)\}.$$

Notons $\bar{\mathcal{A}}_c$ le graphe complet associé aux sommets de \mathcal{S}_c . C'est un sous-graphe de $\bar{\mathcal{A}}$. L'application qui à c associe $\bar{\mathcal{A}}_c$ est $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ -équivariante : pour tout $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, pour tout $c \in \mathcal{E}$:

$$f \cdot \bar{\mathcal{A}}_c = \bar{\mathcal{A}}_{f_{\#}(c)}.$$

Remarquons que pour toute classe $c \in \mathcal{E}$, le sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_c$ est connexe par arcs et de diamètre au plus 1,5 puisque tous les sommets sont deux à deux reliés par une arête. Plus généralement à tout segment géodésique $[c, c']$ de \mathcal{E} nous associons un sous graphe défini de la manière suivante :

$$\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']} := \bigcup_{x \in [c, c']} \bar{\mathcal{A}}_x.$$

Proposition 3.5. *Pour tous $c, c' \in \mathcal{E}$, il existe une suite finie $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$ telle que*

$$\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{A}}_{c_i},$$

où pour tout $0 \leq i \leq n-1$ les sous-graphes $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ et $\bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$ sont non-disjoints :

$$\bar{\mathcal{A}}_{c_i} \cap \bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Paramétrons le segment géodésique $[c, c']$ par $\gamma : [0, 1] \rightarrow [c, c']$. Construisons une suite t_i de points de $[0, 1]$ de la manière suivante. Soit $t_0 = 0$. Supposons le point t_{i-1} construit. Si pour tout $t \in [t_{i-1}, 1]$, $\mathcal{S}_{\gamma(t)}$ est inclus dans $\mathcal{S}_{\gamma(t_{i-1})}$, le procédé s'arrête. Sinon, posons :

$$t_i = \inf\{t \in]t_{i-1}, 1] \mid \mathcal{S}_{\gamma(t)} \not\subseteq \mathcal{S}_{\gamma(t_{i-1})}\}.$$

La suite $\gamma(t_i)$ construite satisfait le corollaire [Lon19, Corollaire 2.13]. Par conséquent, cette suite est finie. Notons $n+1$ le nombre d'éléments de cette suite. Posons pour tout $0 \leq i \leq n$, $c_i = \gamma(t_i)$. Nous avons alors :

$$\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{A}}_{c_i}.$$

Montrons à présent que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, l'intersection entre les sous-graphes $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ et $\bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$ est non-vide. Fixons i et considérons le point c_{i+1} . D'après la proposition [Lon19, Proposition 2.12], il existe une constante $\varepsilon > 0$ dépendant de la classe c_{i+1} telle que pour toute application f , soit c_{i+1} appartient à $\mathcal{V}(f)$, soit la distance entre c_{i+1} et $\mathcal{V}(f)$ est strictement supérieure à ε . Cela implique que pour toute classe c du segment géodésique $[c_i, c_{i+1}]$ à distance inférieure ou égale à ε de c_{i+1} , $\bar{\mathcal{A}}_c$ est inclus dans $\bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$. Comme les cellules de Voronoï pavent l'espace \mathcal{E} , $\bar{\mathcal{A}}_c$ est non-vide. Notons $f_{c_{\#}}(\ell)$ un sommet de ce sous-graphe. Par définition des points $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$, ce sommet appartient également au sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$. Nous avons ainsi montré que l'intersection entre les deux sous-graphes $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ et $\bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$ est non-vide. \square

Soient $f_{\#}(\ell)$ et $g_{\#}(\ell)$ deux sommets de $\bar{\mathcal{A}}$. Construisons $\bar{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell))$. Pour cela, considérons le segment géodésique associé aux classes $f_{\#}(\ell)$ et $g_{\#}(\ell)$. Les sommets de $\bar{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell))$ correspondent aux sommets associés aux cellules de Voronoï ayant une intersection non vide avec ce segment :

$$\bar{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell)) := \bar{\mathcal{A}}_{[f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell)]}.$$

Corollaire 3.6. *Pour tous $c, c' \in \mathcal{E}$, le sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}$ est connexe par arcs. En particulier, c'est le cas de $\bar{\mathcal{A}}(f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell))$ pour tous $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.5, il existe une suite finie de classes $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{A}}_{c_i},$$

où l'intersection entre $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ et $\bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$ est non-vide pour tout $0 \leq i \leq n-1$. De plus, chacun des $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ est connexe par arcs. \square

Corollaire 3.7. *Pour tous $c, c' \in \mathcal{E}$, le diamètre de $\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}$ est fini.*

3.C.b. Borne pour le diamètre du sous-graphe associé à un segment de taille fixée

Lors du corollaire 3.7, nous avons montré que pour toutes classes $c, c' \in \mathcal{E}$, le diamètre du sous-graphe associé $\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}$ est fini. Nous montrons ici que nous pouvons borner le diamètre du sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}$ dans $\bar{\mathcal{A}}$ en fonction de la longueur du segment $[c, c']$ dans \mathbb{H}^{∞} .

Nous reprenons les notations introduites dans [Lon19]. Soit $c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p$ une classe de \mathcal{E} . Le nombre réel n est supérieur ou égal à 1 et est appelé le « degré » de c . Pour tout $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$, le nombre réel positif ou nul λ_p est appelé « la multiplicité » de c associée au point p . Le « support » de c est l'ensemble des points p de $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ tels que λ_p est non-nulle. Par construction, c'est un ensemble dénombrable.

Notons p_0, p_1 et p_2 trois points de $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ de sorte que $\lambda_{p_0} \geq \lambda_{p_1} \geq \lambda_{p_2} \geq \lambda_p$ soit vrai pour tout $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$. La classe c est appelée « spéciale » si les points p_1 et p_2 sont adhérents à p_0 et si $n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} < 0$. Ceci implique par positivité des excès (Définition 1.2.3) que $\lambda_{p_0} > \frac{n}{2}$. Dans ce cas, par l'inégalité de Bézout (Définition 1.2.4), p_0 est l'unique point de c de multiplicité maximale.

Dans la suite, nous notons p_0 un point du support de c de multiplicité maximale : $\lambda_{p_0} \geq \lambda_p$, pour tout $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$.

Lemme 3.8. *Soit $c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \in \mathcal{V}(\text{id})$ une classe spéciale. Soient deux points r et q distincts de p_0 vérifiant $\lambda_r \leq \lambda_q$. Si p_0, q et r sont alignés ou le support d'une application quadratique, alors :*

$$\lambda_r < \frac{n}{4}.$$

Démonstration. Comme c est une classe spéciale, nous avons d'après la remarque [Lon19, Remarque 3.6] l'inégalité : $\lambda_0 > \frac{n}{2}$. Par hypothèse, c appartient à $\mathcal{V}(\text{id})$ et les points p_0, r et q sont soit alignés, soit forment le support d'une application quadratique, ainsi d'après la proposition [Lon19, Proposition 3.5] nous avons $0 \leq n - \lambda_{p_0} - \lambda_r - \lambda_q$. Cela implique que :

$$2\lambda_r \leq \lambda_q + \lambda_r \leq n - \lambda_{p_0} < \frac{n}{2}. \quad \square$$

Le lemme suivant est le point clé technique qui nous sera utile pour montrer la Gromov-hyperbolicité du graphe de quasi-adjacence. Une des difficultés vient du fait que la distance entre deux cellules $\mathcal{V}(f_1)$ et $\mathcal{V}(f_2)$ adjacentes à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ mais pas quasi-adjacentes entre elles, n'est pas forcément réalisée par la distance entre deux classes $c_1 \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f_1)$ et $c_2 \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f_2)$.

Lemme 3.9. *Il existe $K > 1$ telle que pour toute classe $c_1 \in \mathcal{V}(f_1) \cap \mathcal{V}(\text{id})$ de degré n et pour toute application $f_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telle que $d_{\bar{A}}(\text{id}_\#(\ell), f_{2\#}(\ell)) = 1$ et $d_{\bar{A}}(f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell)) \geq 2$, nous avons l'inégalité :*

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq Kn.$$

Démonstration. Par hypothèse, les cellules $\mathcal{V}(f_1)$ et $\mathcal{V}(f_2)$ ne sont pas quasi-adjacentes. Ceci implique que les cellules $\mathcal{V}(\text{id})$, $\mathcal{V}(f_1)$ et $\mathcal{V}(f_2)$ n'ont pas une classe en commun à l'infini. Le corollaire [Lon19, Corollaire 5.21] implique que

- 1) si les applications f_1 et f_2 sont des applications de caractéristiques Jonquières alors le ou les (dans le cas quadratique) point(s)-base de multiplicité maximale de ces applications sont disjoints,
- 2) l'union des points-base de f_1^{-1} et de f_2^{-1} :
 - a) est ou bien de cardinal supérieur ou égal à 10,
 - b) ou bien contient 4 points alignés,
 - c) ou bien contient 7 points sur une conique,
 - d) ou bien contient deux points adhérents à un troisième point de cet ensemble.

Notons d le degré de f_2 et $\{m_p\}_{p \in \text{Bs}(f_2^{-1})}$ les multiplicités des points-base de f_2^{-1} . Rappelons que

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) = dn - \sum_{p \in \text{Bs}(f_2^{-1})} m_p \lambda_p.$$

D'après les équations de Noether, nous avons l'égalité $3(d-1) = \sum_{p \in \text{Bs}(f_2^{-1})} m_p$. Par conséquent, nous pouvons partitionner le multi-ensemble composé des points-base de f_2^{-1} comptés avec leur multiplicité en $d-1$ triplets de sorte que chaque triplet soit composé de points deux à deux disjoints ([Lon19, Lemme 3.2]). Notons T une telle partition. Nous avons alors l'égalité suivante :

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) = n + \sum_{\{\{p_i, p_j, p_k\} \in T\}} (n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k}). \quad (3.10)$$

Différencions deux cas selon si la classe c_1 est spéciale ou non.

- Plaçons-nous dans le cas où la classe c_1 n'est pas spéciale.

Fait 3.11. S'il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$ alors $c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{49}{48}n$.

Démonstration. Comme la classe c_1 n'est pas spéciale et qu'elle appartient à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ la somme de ses trois plus grandes multiplicités (notées $\lambda_{p_0} \geq \lambda_{p_1} \geq \lambda_{p_2}$) est inférieure ou égale à son degré d'après [Lon19, Corollaire 3.7]. Par conséquent, pour tout triplet $\{\{p_i, p_j, p_k\} \in T\}$ nous avons :

$$n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} \geq n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout triplet $\{\{p_i, p_j, p_k\} \in T\}$ l'inégalité suivante est satisfaite :

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq n + (n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k}). \quad (3.12)$$

Par hypothèse, il existe un point-base de f_2^{-1} tel que sa multiplicité pour c soit inférieure ou égale à $\frac{5n}{16}$. Notons ce point q . Considérons deux cas selon si f_1 est une application de caractéristique Jonquières ou pas.

* Si f_1 n'est pas de caractéristique Jonquières, d'après le théorème [Lon19, Théorème 4.1] toutes les multiplicités de c sont inférieures ou égales à $\frac{n}{3}$. Par conséquent, en considérant un triplet de T où le point q apparaît nous avons d'après l'équation (3.12) la minoration suivante :

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq n + (n - 2\frac{n}{3} - \frac{5n}{16}) = \frac{49}{48}n.$$

* Si f_1 est de caractéristique Jonquières de degré supérieur ou égal à 3, tout point distinct du point-base maximal p_0 de f_1^{-1} a une multiplicité pour c inférieure ou égale à $\frac{n}{3}$ (voir [Lon19, Théorème 4.1]). De plus, par le point 1), f_2 ne peut pas être une application de caractéristique Jonquières en ce point-là et ainsi $m_0 < d - 1$. Ceci signifie qu'il existe un triplet t_1 ne contenant pas le point p_0 . Quitte à échanger le point q avec un point du triplet t_1 qui n'apparaît pas dans un triplet contenant le point q , nous pouvons supposer qu'il existe un triplet contenant le point q et ne contenant pas le point p_0 . Nous obtenons la même minoration que dans le cas précédent. Si f_1 est une application quadratique alors par [Lon19, Théorème 4.1] toutes les multiplicités de c autres que λ_{p_0} et λ_{p_1} sont inférieures ou égales à $\frac{n}{3}$. De plus, par hypothèse, si f_2 est une application de caractéristique Jonquières, le (ou les) point-base de multiplicité maximale de f_2 n'est ni p_0 ni p_1 ni p_2 . Ainsi, par le même argument que précédemment, il existe un triplet t_1 ne contenant pas le point p_0 . Si ce triplet contient le point p_1 , comme $m_1 < d - 1$ il existe un triplet t' différent ne contenant pas le point p_1 . Nous échangeons alors un point du triplet t' différent de p_0 avec le point p_1 qui se trouve dans le triplet t_1 . De même que précédemment, si t_1 ne contient pas le point q nous pouvons échanger q avec un des trois points de t_1 qui n'apparaît pas dans un triplet contenant q . Ainsi tous les triplets sont positifs et un triplet contient q mais pas p_0 et p_1 et nous obtenons la même majoration que dans le cas précédent. \square

Il nous reste maintenant à montrer qu'il existe toujours un point-base de f_2^{-1} dont la multiplicité associée est inférieure ou égale à $\frac{5n}{16}$.

Fait 3.13. Si $\lambda_{p_0} \geq \frac{3n}{8}$ alors il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$.

Démonstration. Dans ce cas, par le théorème [Lon19, Théorème 4.1], f_1 est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour base maximal le point p_0 . Si f_1 est de degré supérieur ou égal à 3, toujours d'après le même théorème nous obtenons la majoration attendue pour tout point $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ différent de p_0 :

$$\lambda_p \leq \frac{n - \lambda_{p_0}}{2} \leq \frac{5n}{16}.$$

Si f_1 est de degré 2, d'après [Lon19, Théorème 4.1], nous avons $n = \lambda_{p_0} + \lambda_{p_1} + \lambda_{p_2}$. Ainsi, pour tout point $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ différent de p_0 et de p_1 nous obtenons :

$$\lambda_p \leq \lambda_{p_2} \leq \frac{\lambda_{p_2} + \lambda_{p_1}}{2} = \frac{n - \lambda_{p_0}}{2} \leq \frac{5n}{16}.$$

Par conséquent, tout point-base de f_2^{-1} différent de p_0 et de p_1 possède la propriété attendue. \square

D'après [Lon19, Théorème 4.1], comme la classe c_1 n'est pas spéciale, nous avons :

$$\lambda_q \geq \lambda_p \text{ pour tout } q \in \text{Bs}(f_1^{-1}) \text{ et pour tout } p \notin \text{Bs}(f_1^{-1}). \quad (3.14)$$

Nous avons besoin de la variante suivante en considérant des points-base de f_2^{-1} .

Fait 3.15. Il existe un point-base de f_2^{-1} , $p \in \text{Bs}(f_2^{-1})$, tel que pour tout point-base $q \in \text{Bs}(f_1^{-1})$, les multiplicités associées satisfont : $\lambda_p \leq \lambda_q$.

Démonstration. Si $\text{Bs}(f_2^{-1})$ n'est pas inclus dans $\text{Bs}(f_1^{-1})$ alors il existe $p \in \text{Bs}(f_2^{-1})$ tel que $p \notin \text{Bs}(f_1^{-1})$. Ainsi, d'après l'inégalité (3.14), pour tout point $q \in \text{Bs}(f_1^{-1})$, $\lambda_p \leq \lambda_q$ et le fait est prouvé dans ce cas.

Sinon, nous distinguons deux cas suivant que f_1 est de caractéristique Jonquières ou non. Si f_1 n'est pas de caractéristique Jonquières alors d'après [Lon19, Théorème 4.1], pour tout point $p \in \text{Bs}(f_2^{-1})$, $\lambda_p = \frac{n}{3} = \lambda_q$ pour tout point $q \in \text{Bs}(f_1^{-1})$ ce qui prouve le fait dans ce cas. Supposons maintenant que f_1^{-1} est une application de caractéristique Jonquières. Si elle est de degré 2, comme nous sommes dans le cas où les

points-base de f_2^{-1} sont inclus dans ceux de f_1^{-1} , f_2^{-1} possède les mêmes trois points-base et est une application quadratique. Or par hypothèse 3.C.b, ceci est impossible. L'application f_1^{-1} est par conséquent de degré supérieur ou égal à trois. Comme f_2^{-1} possède au moins trois points-base, il en existe un différent de p_0 , noté p et par [Lon19, Théorème 4.1], $\lambda_p = \frac{n-\lambda_0}{2} = \lambda_q \leq \lambda_{p_0}$ pour tout point $q \in \text{Bs}(f_1^{-1})$ différent de p_0 ce qui finit de démontrer le fait. \square

Dans le cas où λ_{p_0} est strictement inférieur à $\frac{3n}{8}$, nous distinguons les 4 possibilités : a), b), c), d), et montrons qu'il existe un point-base de f_2^{-1} dont la multiplicité associée est inférieure ou égale à $\frac{5n}{16}$.

Fait 3.16. Si $\lambda_{p_0} < \frac{3n}{8}$ et si nous sommes dans le cas a) alors il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$.

Démonstration. Notons λ_{\min} la plus petite multiplicité pour c correspondant à un point-base de l'union des points-base de f_1^{-1} et de f_2^{-1} . Comme l'union des points-base de f_1^{-1} et de f_2^{-1} est de cardinal supérieur ou égal à 10, nous avons alors par l'inégalité contre l'anti-canonique 1.2.2) :

$$10\lambda_{\min} \leq \sum_{p \in \text{Bs}(f_1^{-1}) \cup \text{Bs}(f_2^{-1})} \lambda_p \leq \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p \leq 3n.$$

Ainsi, $\lambda_{\min} \leq \frac{3n}{10} \leq \frac{5n}{16}$. Si cette multiplicité n'est pas associée à un point-base de f_2^{-1} , elle correspond donc à un point-base de f_1^{-1} et par le fait 3.15, il existe $p \in \text{Bs}(f_2^{-1})$ dont la multiplicité associée est inférieure à λ_{\min} : $\lambda_p \leq \lambda_{\min} \leq \frac{5n}{16}$. \square

Fait 3.17. Si $\lambda_{p_0} < \frac{3n}{8}$ et si nous sommes dans le cas b) alors il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$.

Démonstration. Si 4 des points de l'union des points-base de f_1^{-1} et de f_2^{-1} sont alignés alors en notant λ_{\min} la plus petite des 4 multiplicités et p_{\min} le point associé, nous avons par l'inégalité de Bézout 1.2.4) :

$$4\lambda_{\min} \leq n.$$

Par conséquent, $\lambda_{\min} \leq \frac{n}{4} \leq \frac{5n}{16}$. De plus, comme précédemment, si $p_{\min} \notin \text{Bs}(f_2^{-1})$, par le fait 3.15, il existe un point $p \in \text{Bs}(f_2^{-1})$ tel que $\lambda_p \leq \lambda_{\min} \leq \frac{5n}{16}$ ce qui achève la preuve. \square

Le cas où 7 points sont sur une conique se prouve de façon similaire.

Fait 3.18. Si $\lambda_{p_0} < \frac{3n}{8}$ et si nous sommes dans le cas c) alors il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$.

Fait 3.19. Si $\lambda_{p_0} < \frac{3n}{8}$ et si nous sommes dans le cas d) alors il existe un point-base p de f_2^{-1} tel que $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$.

Démonstration. Considérons le cas où 2 points q_1 et q_2 de l'ensemble de l'union de points-base de f_1^{-1} et de f_2^{-1} sont adhérents à un troisième point q_0 . En notant λ_{\min} la plus petite des deux multiplicités associées à ces points pour c , nous avons par positivité des excès :

$$2\lambda_{\min} \leq \lambda_{q_1} + \lambda_{q_2} \leq \lambda_{q_0} \leq \frac{3n}{8}.$$

Comme précédemment, si le point dont la multiplicité est λ_{\min} n'est pas un point-base de f_2^{-1} alors c'est un point-base de f_1^{-1} et nous pouvons conclure par le fait 3.15. \square

Ceci achève la preuve du lemme 3.9 dans le cas où la classe c_1 n'est pas spéciale.

- Intéressons-nous maintenant au cas où la classe c_1 est spéciale. Par le théorème [Lon19, Théorème 4.1] l'application f_1 est une application de caractéristique Jonquières et le point-base maximal de f_1^{-1} est p_0 . De plus, notons p_1 et p_2 deux points adhérents au point p_0 tels que $\lambda_{p_0} \geq \lambda_{p_1} \geq \lambda_{p_2} \geq \lambda_p$ pour tout $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$.

Comme f_2 est le germe d'une cellule quasi-adjacente à $\mathcal{V}(\text{id})$ soit elle est de caractéristique Jonquières soit elle ne possède pas deux points-base adhérents à un même troisième de ses points-base (Théorème 0.2). Si elle est de caractéristique Jonquières, d'après 3.C.b, le point p_0 n'est pas le point-base de multiplicité maximal de f_2^{-1} (ou l'un des dans le cas où f_2 est quadratique). Par conséquent, f_2^{-1} ne peut pas posséder deux points-base adhérents au point p_0 . Ainsi, quelle que soit f_2 , l'application f_2^{-1} ne possède pas deux points adhérents au point p_0 .

Parmi les points-base de f_2^{-1} différents de p_0 (si ce dernier appartient à $\text{Bs}(f_2^{-1})$), considérons-en deux de multiplicités maximales pour c . Notons-les q et r avec $\lambda_q \geq \lambda_r$. Comme ces deux points ne sont pas adhérents au point p_0 et par positivité des excès pour c 1.2.3), les trois points p_0 , q et r sont alignés ou forment le support d'une application quadratique. Comme c appartient à $V(\text{id})$ nous obtenons par la proposition [Lon19, Proposition 3.5] que pour tout triplet (p_i, p_j, p_k) de points-base de f_2^{-1} ne contenant pas deux fois le point p_0 ni deux fois le point q :

$$n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} \geq n - \lambda_{p_0} - \lambda_q - \lambda_r \geq 0. \quad (3.20)$$

De plus, par le lemme 3.8, $\lambda_r \leq \frac{n}{4}$ et c'est le cas de toutes les multiplicités pour c associées aux points-base de f_2^{-1} hors p_0 et p_q .

Si l'application f_2^{-1} n'est pas une application de caractéristique Jonquières de point-base maximal le point q alors les multiplicités m_{p_0} et m_q sont strictement inférieures à $d - 1$. Par conséquent, nous pouvons partitionner le multi-ensemble des points-base de f_2^{-1} comptés avec multiplicité en $d - 1$ triplets de sorte qu'un triplet ne contienne pas p_0 et q et que tous les autres contiennent au plus une fois le point p_0 et une fois le point q . Par l'équation (3.20), les termes de la somme (3.10) associés à ces triplets sont tous positifs. De plus, le terme associé au triplet ne contenant pas les points p_0 et q est minoré par : $n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$. Ainsi,

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{5}{4}n.$$

Si maintenant le point q est un point-base maximal de l'application f_2^{-1} de caractéristique Jonquières alors le point q est dans \mathbb{P}^2 et les points p_0 , p_1 et q sont soit alignés soit le support d'une application quadratique. Le lemme 3.8 implique que $\lambda_q \leq \frac{n}{4}$ et c'est le cas de tous les points-base de f_2^{-1} excepté p_0 si c'est un point-base de f_2^{-1} . Comme précédemment, la multiplicité m_{p_0} est strictement inférieure à $d - 1$ et il existe donc au moins un triplet où le point p_0 n'apparaît pas. Par conséquent, le terme de la somme (3.10) correspondant au triplet où le point p_0 n'apparaît pas est minoré par : $n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$. Tous les autres triplets sont constitués d'indices deux à deux disjoints ainsi d'après l'inégalité (3.20) ils sont tous positifs ou nuls. Par conséquent dans ce cas-là nous obtenons la même minoration

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{5}{4}n.$$

Ceci achève la preuve dans le cas où la classe c_1 est spéciale et par conséquent celle du lemme 3.9. \square

Lemme 3.21. *Soient $c_1 \in \mathcal{V}(\text{id})$, $c_2 \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $d(c_1, c_2) \leq \varepsilon$. Alors, pour toute application $f_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telle que $c_2 \in \mathcal{V}(f_2)$, nous avons l'inégalité :*

$$0 \leq 1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} \leq 2\varepsilon.$$

Démonstration. Par la définition des cellules de Voronoï, nous avons d'une part

$$d(c_1, \ell) \leq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) \text{ et } d(c_2, f_{2\#}(\ell)) \leq d(c_2, \ell)$$

et d'autre part, par l'inégalité triangulaire nous obtenons :

$$d(c_1, f_{2\#}(\ell)) \leq \varepsilon + d(c_2, f_{2\#}(\ell)) \leq \varepsilon + d(c_2, \ell) \leq 2\varepsilon + d(c_1, \ell). \quad (3.22)$$

Par conséquent nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) - d(c_1, \ell) \leq 2\varepsilon.$$

En utilisant la majoration précédente et par concavité de la fonction $\operatorname{argcosh}$ nous obtenons l'inégalité annoncée :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\geq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) - d(c_1, \ell) = \operatorname{argcosh}(c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)) - \operatorname{argcosh}(c_1 \cdot \ell) \\ &\geq \frac{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) - c_1 \cdot \ell}{\sqrt{(c_1 \cdot f_{2\#}(\ell))^2 - 1}} \\ &\geq \frac{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) - c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} = 1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)}. \quad \square \end{aligned}$$

Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles de \mathcal{E} . Nous définissons :

$$d(E_1, E_2) = \inf\{d(c_1, c_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

Attention, bien que souvent appelée « distance » entre E_1 et E_2 ce n'est pas une distance sur les sous-ensembles de \mathcal{E} .

Lemme 3.23. *Il existe $M > 0$ tel que pour toutes applications $f_1, f_2 \in \operatorname{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telles que $d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell)) = 2$, nous avons :*

$$d(\mathcal{V}(f_1), \mathcal{V}(f_2)) \geq M.$$

Démonstration. Soient $c \in \mathcal{V}(f_1)$ et $c' \in \mathcal{V}(f_2)$. Montrons que $d(c, c') \geq M$. Considérons le segment $[c, c']$. Quitte à faire agir le germe de la cellule traversée juste après $\mathcal{V}(f_1)$, nous pouvons supposer que c'est la cellule associée à l'identité et que la cellule $\mathcal{V}(f_1)$ est adjacente à la cellule $\mathcal{V}(\operatorname{id})$. Notons c_1 la classe du segment $[c, c']$ qui se trouve dans l'intersection $\mathcal{V}(\operatorname{id}) \cap \mathcal{V}(f_1)$ et n son degré.

Considérons dans un premier temps le cas où la cellule $\mathcal{V}(f_2)$ est quasi-adjacente à $\mathcal{V}(\operatorname{id})$. Notons c_2 la classe de l'intersection $[c, c'] \cap \mathcal{V}(f_2)$ qui minimise la distance à c :

$$d(c, c_2) \leq d(c, y) \text{ pour tout } y \in \mathcal{V}(f_2) \cap [c, c'].$$

Reprenons la constante $K > 1$ du lemme 3.9 et posons $M = \frac{K-1}{3K}$. Montrons que la distance entre c_1 et c_2 est supérieure ou égale à M . Supposons le contraire alors par le lemme 3.21, nous obtenons :

$$1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} \leq 2M.$$

Or d'après le lemme 3.9, nous avons $Kn \leq c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)$, ce qui implique la contradiction $\frac{K-1}{K} \leq 2M = \frac{2(K-1)}{3K}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la cellule $\mathcal{V}(f_2)$ n'est pas quasi-adjacente à $\mathcal{V}(\operatorname{id})$. Montrons qu'il existe trois cellules traversées par le segment $[c, c']$ ayant la configuration précédente. Considérons les cellules traversées par le segment $[c, c']$ et considérons le premier germe g_1 tel que les cellules $\mathcal{V}(f_1)$ et $\mathcal{V}(g_1)$ soient à distance 2 dans le graphe de quasi-adjacence $d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_{1\#}(\ell), g_{1\#}(\ell)) = 2$. Par conséquent, celle juste avant notée $\mathcal{V}(g)$ est à distance 1 de $\mathcal{V}(f_1)$. Alors, les cellules $\mathcal{V}(g)$ et $\mathcal{V}(g_1)$ sont adjacentes entre elles et $\mathcal{V}(g)$ et $\mathcal{V}(f_1)$ sont quasi-adjacentes entre elles. Nous nous retrouvons dans le cas précédent où g remplace id , g_1 remplace f_1 et f_1 remplace f_2 . Ceci achève la preuve du lemme. \square

Proposition 3.24. *Pour toute constante $L > 0$, il existe $B(L) > 0$ tel que pour tous $c, c' \in \mathcal{E}$ vérifiant $d(c, c') \leq L$, le diamètre du graphe associé au segment est borné par $B(L)$:*

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}) \leq B(L).$$

Démonstration. Paramétrons le segment $[c, c']$ par $\gamma : [0, 1] \rightarrow [c, c']$ avec $\gamma(0) = c$ et $\gamma(1) = c'$. Nous construisons une suite de points $\{t_i\}$ de $[0, 1]$, et une suite d'applications $f_i \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, par le procédé de récurrence suivant. Initialisons en posant $t_0 = 0$, et en choisissant $f_0 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ tel que $c = \gamma(0) \in \mathcal{V}(f_0)$. Pour $i \geq 1$, supposons le point $t_{i-1} \in [0, 1[$ construit et l'application f_{i-1} choisie. Si pour tout $t \in [t_{i-1}, 1]$, toute application $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telle que $\gamma(t) \in \mathcal{V}(f)$ satisfait $d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_{i-1\#}(\ell), f_{i\#}(\ell)) \leq 1$, alors nous posons $t_i = 1$ et le procédé s'arrête. Sinon nous posons :

$$t_i = \inf \left\{ t \in]t_{i-1}, 1] \mid \exists f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \gamma(t) \in \mathcal{V}(f) \text{ et } d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_{i-1\#}(\ell), f_{i\#}(\ell)) = 2 \right\}.$$

Ensuite, nous choisissons $f_i \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ satisfaisant $d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_{i-1\#}(\ell), f_{i\#}(\ell)) = 2$ et $\gamma(t_i) \in \mathcal{V}(f_i)$. Si $t_i < 1$, le lemme 3.23 implique qu'il existe une constante universelle $M > 0$ telle que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \geq M$. En conséquence, après un nombre fini d'étapes le procédé s'arrête. Plus précisément, la suite possède au plus $\lceil \frac{L}{M} \rceil + 1$ termes. Posons pour tout i , $c_i = \gamma(t_i)$. Pour tout $i \geq 0$ les sommets du sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_{[c_i, c_{i+1}[}$ sont par construction à distance 1 du sommet \bar{f}_i . Ainsi, le diamètre de ce sous-graphe est borné :

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{[c_i, c_{i+1}[}) \leq 1, 5.$$

Nous obtenons finalement :

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{[c, c']}) \leq \sum_{i=0}^{\lceil \frac{L}{M} \rceil - 1} \text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{[c_i, c_{i+1}[}) + \text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{c'}) \leq 1, 5 \times \left(\left\lceil \frac{L}{M} \right\rceil + 1 \right),$$

ce qui achève la preuve de la proposition en posant $B(L) = 1, 5 \times (\lceil \frac{L}{M} \rceil + 1)$. \square

3.C.c. Hyperbolicité du graphe de quasi-adjacence

Nous pouvons maintenant appliquer le critère de Bowditch (Théorème 1.4) pour obtenir notre résultat principal.

Théorème 3.25. *Le graphe de quasi-adjacence est hyperbolique au sens de Gromov.*

Démonstration. Soit $h = \max(B(\delta), B(17))$ où $\delta = \ln(1 + \sqrt{2})$ est la constante de Gromov-hyperbolicité de \mathbb{H}^∞ et B est l'application de la proposition 3.24. À tous sommets $f_\#(\ell)$ et $g_\#(\ell)$ nous associons les sous-graphes construits dans la sous-section 3.C.a :

$$\bar{\mathcal{A}}(f_\#(\ell), g_\#(\ell)).$$

Par construction, pour tous $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, les sommets $f_\#(\ell)$ et $g_\#(\ell)$ appartiennent au sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}(f_\#(\ell), g_\#(\ell))$. De plus d'après le corollaire 3.6, ce sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}(f_\#(\ell), g_\#(\ell))$ est connexe par arcs. Ceci prouve le point 1) du critère.

Montrons que le point 2) est vérifié. Considérons trois sommets $f_{1\#}(\ell)$, $f_{2\#}(\ell)$ et $f_{3\#}(\ell)$ du graphe de quasi-adjacence. Soit $f_\#(\ell)$ un sommet de $\bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell))$. Par construction, il existe une classe $c_f \in [f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell)]$ telle que $f_\#(\ell)$ est un sommet du sous-graphe $\bar{\mathcal{A}}_{c_f}$ associé à c_f . L'espace \mathcal{E} étant δ -hyperbolique, il existe une classe $c_2 \in [f_{1\#}(\ell), f_{3\#}(\ell)] \cup [f_{2\#}(\ell), f_{3\#}(\ell)]$ telle que $d(c_2, c_f) \leq \delta$. Pour tout sommet $g_\#(\ell) \in \bar{\mathcal{A}}_{c_2} \subset \bar{\mathcal{A}}(f_{2\#}(\ell), f_{3\#}(\ell)) \cup \bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), f_{3\#}(\ell))$, nous avons d'après la proposition 3.24 :

$$d_{\bar{\mathcal{A}}}(f_\#(\ell), g_\#(\ell)) \leq \text{Diam}(\bar{\mathcal{A}}_{[c_f, c_2]}) \stackrel{3.24}{\leq} B(\delta).$$

Ceci prouve le point 2).

Intéressons-nous à présent au point 3). Soient $f_{1\#}(\ell)$ et $f_{2\#}(\ell)$ deux sommets de $\bar{\mathcal{A}}_c$ à distance inférieure ou égale à 1. Si les deux sommets sont identiques, la condition 3) est immédiatement vérifiée puisque le sous-graphe associé à ces deux sommets est réduit au sommet $f_{1\#}(\ell)$. Supposons à présent que les deux sommets $f_{1\#}(\ell)$ et $f_{2\#}(\ell)$ sont à distance 1. Nous voulons montrer que $\bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell))$ est de diamètre borné. Quitte à faire agir f_2^{-1} , nous pouvons supposer que $f_2 = \text{id}$ et que f_1 est le germe d'une cellule quasi-adjacente à $\mathcal{V}(\text{id})$. D'après le corollaire 0.2, l'application f_1 est soit une application de caractéristique Jonquières, soit elle n'est pas de caractéristique Jonquières mais son inverse possède au plus 8 points-base en position presque générale, soit ce n'est pas une application de caractéristique Jonquières et son inverse possède exactement 9 points-base en position presque générale. Nous distinguons ces trois cas.

- Si l'application f_1 est de caractéristique Jonquières alors par le lemme [Lon19, Lemme 4.11], nous avons l'inclusion :

$$[\ell, f_{1\#}(\ell)] \subset \mathcal{V}(\text{id}) \cup \mathcal{V}(f_1)$$

qui implique que

$$\text{Diam}\left(\bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell))\right) \leq 1, 5.$$

- Considérons le cas où l'application f_1 n'est pas de caractéristique Jonquières et son inverse possède au plus 8 points-base en position presque générale. C'est donc le germe d'une cellule adjacente à la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$ (Corollaire 0.1). D'après [Lon19, Corollaire 4.9] le degré de f_1 est inférieur ou égal à 17, ainsi la longueur du segment géodésique $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$ est inférieure ou égale à 17. La proposition 3.24 implique que le diamètre de $\bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell))$ est inférieur ou égal à $B(17)$. Comme $h \geq B(17)$, le point 3) du critère de Bowditch est vérifié dans ce cas-là.

- Considérons le dernier cas, celui où l'application f_1 n'est pas de caractéristique Jonquières et son inverse possède exactement 9 points-base en position presque générale. C'est le germe d'une cellule quasi-adjacente non adjacente à $\mathcal{V}(\text{id})$ (Corollaire 0.2). Le segment reliant ℓ et $f_{1\#}(\ell)$ est constitué de classes ayant exactement les 9 points-base de f_1^{-1} comme support. En particulier, les classes de ce segment géodésique ne sont pas spéciales. Montrons que pour tout sommet $g_{\#}(\ell)$ de $\bar{\mathcal{A}}_{[\ell, f_{1\#}(\ell)]}$ la cellule $\mathcal{V}(g)$ possède dans son bord à l'infini la classe

$$s = 3\ell - \sum_{p \in \text{Bs}(f_1^{-1})} e_p$$

et est par conséquent à distance 1 du sommet $\text{id}_{\#}(\ell)$ dans le graphe de quasi-adjacence. Le diamètre de $\bar{\mathcal{A}}(f_{1\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell))$ sera ainsi inférieur ou égal à 1, 5.

D'après la proposition 3.5, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une suite finie $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de classes du segment $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$ telle que $c_0 = \ell$, $c_n = f_{1\#}(\ell)$ et

$$\bar{\mathcal{A}}_{[\ell, f_{1\#}(\ell)]} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{A}}_{c_i},$$

où l'intersection $\bar{\mathcal{A}}_{c_i} \cap \bar{\mathcal{A}}_{c_{i+1}}$ est non-vide pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Montrons par récurrence sur n que tous les sommets de $\bar{\mathcal{A}}_{c_i}$ ont la classe s dans leur bord à l'infini. C'est le cas pour $\text{id}_{\#}(\ell)$ et $\bar{\mathcal{A}}_{\ell} = \{\text{id}_{\#}(\ell)\}$ par [Lon19, Proposition 5.19]. Supposons que le résultat soit vrai pour c_{i-1} et montrons-le pour c_i .

Soit $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ telle que $f_{\#}(\ell) \in \bar{\mathcal{A}}_{c_{i-1}} \cap \bar{\mathcal{A}}_{c_i}$. Par hypothèse de récurrence, la classe s est dans le bord à l'infini de la cellule $\mathcal{V}(f)$. D'après la proposition [Lon19, Proposition 5.19] cela implique que $\text{Bs}(f^{-1})$ est inclus dans le support de s . En utilisant le lemme [Lon19, Lemme 5.15], nous obtenons que

$$f_{\#}^{-1}(s) = 3\ell - \sum_{q \in \text{Bs}(f)} e_q - \sum_{\substack{p \in \text{supp}(s) \\ p \notin \text{Bs}(f)}} f_{\#}^{-1}(e_p)$$

est une classe 9-symétrique appartenant au bord à l'infini de la cellule $\mathcal{V}(\text{id})$. Soit $g \in \bar{\mathcal{A}}_{c_i}$. La classe $f_{\#}^{-1}(c_i)$ appartient à l'intersection des cellules $\mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f^{-1} \circ g)$. De plus, les supports de c_i et de s étant les mêmes il en est de même des supports de $f_{\#}^{-1}(c_i)$ et de $f_{\#}^{-1}(s)$. Ainsi, d'après le théorème [Lon19, Théorème 4.1] les points-base de $f^{-1} \circ g$ sont inclus dans le support de $f_{\#}^{-1}(s)$, ce qui implique que la classe $f_{\#}^{-1}(s)$ est dans le bord à l'infini de la cellule $\mathcal{V}(f^{-1} \circ g)$, par la proposition [Lon19, Proposition 5.19]. En appliquant f nous obtenons que la classe s est dans le bord à l'infini de la cellule $\mathcal{V}(g)$ comme attendu. Ceci achève la preuve. \square

Références

- [AC02] M. Alberich-Carramiñana, *Geometry of the plane Cremona maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, Springer-Verlag, Berlin, 2002. [MR-1874328](#)
- [BC16] J. Blanc & S. Cantat, *Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 2, 415–471. [MR-3454379](#)
- [BF14] M. Bestvina & M. Feighn, *Hyperbolicity of the complex of free factors*, Adv. Math. **256** (2014), 104–155. [MR-3177291](#)
- [BF19] J. Blanc & J-P. Furter, *Length in the Cremona group*, Ann. H. Lebesgue **2** (2019), 187–257. [MR-3978388](#)
- [BFJ08] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson, *Degree growth of meromorphic surface maps*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 3, 519–538. [MR-2387430](#)
- [BH99] M. R. Bridson & A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. [MR-1744486](#)
- [Bow08] B. H. Bowditch, *Tight geodesics in the curve complex*, Invent. Math. **171** (2008), no. 2, 281–300. [MR-2367021](#)
- [Bow14] ———, *Uniform hyperbolicity of the curve graphs*, Pacific J. Math. **269** (2014), no. 2, 269–280. [MR-3238474](#)
- [Can11] S. Cantat, *Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 299–340. [MR-2811600](#)
- [Can18] ———, *The Cremona groups*. Dans : Algebraic geometry : Salt Lake City 2015, pp. 101–142, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 97.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018. [MR-3821147](#)
- [CD12] S. Cantat & I. Dolgachev, *Rational surfaces with a large group of automorphisms*, J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), no. 3, 863–905. [MR-2904576](#)
- [CL13] S. Cantat & S. Lamy, *Normal subgroups in the Cremona group*. With an appendix by Yves de Cornulier. Acta Math. **210** (2013), no. 1, 31–94. [MR-3037611](#)
- [DGO17] F. Dahmani, V. Guirardel & D. Osin, *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **245** (2017), no. 1156. [MR-3589159](#)
- [Fav10] C. Favre, *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011. Astérisque No. 332 (2010), Exp. No. 998, vii, 11–43. [MR-2648673](#)
- [GdlH90] E. Ghys & P. de la Harpe, *Quasi-isométries et quasi-géodésiques*. Dans : Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988), pp. 79–102, Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990. [MR-1086653](#)
- [HM13] M. Handel & L. Mosher, *The free splitting complex of a free group, I : hyperbolicity*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 3, 1581–1672. [MR-3073931](#)
- [Lon16] A. Lonjou, *Non simplicité du groupe de Cremona sur tout corps*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), no. 5, 2021–2046. [MR-3533276](#)

- [Lon17] ———, *Groupe de Cremona et espaces hyperboliques*, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2017. https://algebra.dmi.unibas.ch/lonjou/recherche/these_lonjou.pdf
- [Lon19] ———, *Pavage de Voronoï associé au groupe de Cremona*, Publ. Mat. **63** (2019), no. 2, 521–599. [MR-3980934](#)
- [MO15] A. Minasyan & D. Osin, *Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees*, Math. Ann. **362** (2015), no. 3-4, 1055–1105. [MR-3368093](#)
- [Osi16] D. Osin, *Acylindrically hyperbolic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 2, 851–888. [MR-3430352](#)
- [Vog15] K. Vogtmann, *On the geometry of outer space*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **52** (2015), no. 1, 27–46. [MR-3286480](#)
- [Wri92] D. Wright, *Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 1, 281–300. [MR-1038019](#)