*Épijournal de Géométrie Algébrique*
epiga.episciences.org
Volume 6 (2022), Article Nr. 11



# Autour de la conjecture de Tate entière pour certains produits de dimension 3 sur un corps fini

**Federico Scavia**

**Résumé**. Soit $X$ le produit d'une surface satisfaisant $b_2 = \rho$ et d'une courbe sur un corps fini. On étudie une forme forte de la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur $X$. On généralise et donne des preuves inconditionnelles de plusieurs résultats de notre article précédent avec J.-L. Colliot-Thélène.

**Mots-clés.** Conjecture de Tate; surface d'Enriques; cohomologie non-ramifiée; cycles algébriques; corps fini

**Classification mathématique par matières (MSC 2020)**. 14C25, 14C35, 14G15

**[English]**

**On the integral Tate conjecture for certain products of dimension 3 over a finite field**

**Abstract**. Let $X$ be the product of a surface satisfying $b_2 = \rho$ and of a curve over a finite field. We study a strong form of the integral Tate conjecture for 1-cycles on $X$. We generalize and give unconditional proofs of several results of our previous paper with J.-L. Colliot-Thélène.

Received by the Editors on October 5, 2021, and in final form on February 6, 2022.
Accepted on February 17, 2022.

Federico Scavia
Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095, United States of America
*e-mail:* scavia@math.ucla.edu

## Table des matières



# 1. Introduction

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, $G$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$, $\ell$ un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}$, $X$ une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse et géométriquement connexe, de dimension $d$, et $\overline{X} := X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$. Si $M$ est un $G$-module, on note $M^{(1)} \subset M$ le sous-groupe formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de $G$. Si $i \geq 0$ est un entier, la conjecture de Tate pour les cycles de codimension $i$ en cohomologie $\ell$-adique prédit que les applications cycle

$$CH^i(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{(1)}, \tag{1.1}$$

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G}, \tag{1.2}$$

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \tag{1.3}$$

sont surjectives. En fait ces trois versions de la conjecture de Tate sont équivalentes : l'équivalence entre la surjectivité des applications (1.1) et (1.2) suit par un argument de restriction-corestriction, et celle entre la surjectivité des applications (1.2) et (1.3) utilise les conjectures de Weil.

On s'intéresse ici aux variantes entières de la conjecture de Tate. Celles-ci ne sont pas vraies en général, mais on a des raisons d'espérer qu'elles le soient dans le cas $i = d-1$, c'est-à-dire pour les 1-cycles ; voir [CTSz10, §2]. Les questions d'intérêt sont donc les suivantes : les applications

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^{(1)}, \tag{1.1'}$$

$$CH^{d-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^{G}, \tag{1.2'}$$

$$CH^{d-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)) \tag{1.3'}$$

sont-elles surjectives ? Depuis leur conception, ces questions ont inspiré un grand nombre de travaux par de nombreux auteurs. Le but de cet article est de montrer la surjectivité de ces applications (surtout (1.3')) pour certaines variétés de dimension 3.

### 1.1. Résultats précédents.

Établir la surjectivité de l'application (1.1') s'avère être le problème le plus abordable. Un célèbre théorème de Schoen [Sch98, Theorem (0.5)] montre que si la conjecture de Tate pour les surfaces est vraie (c'est-à-dire sous l'hypothèse que l'application (1.2) est surjective pour les cycles de diménsion 1 sur toute surface sur toute extension finie de $\mathbb{F}$) alors l'application (1.1') est surjective pour tout $X$. Il y a aussi des résultats inconditionnels dans certains cas particuliers : les hypersurfaces cubiques de dimension 4 par Charles et Pirutka [CP15, Théorème 1.1] et les variétés abéliennes de dimension 3 par Totaro [Tot21, Theorem 7.1].

Par contre, la surjectivité des applications (1.2') et (1.3') est généralement plus difficile à montrer que celle de l'application (1.1'). Par exemple, on ne connaît pas d'analogues des théorèmes de Schoen, Charles, Pirutka et Totaro pour ces variantes, et déjà pour $X$ un produit de trois courbes elliptiques la surjectivité de l'application (1.3') est un problème ouvert bien connu des spécialistes. Comme l'a noté Schoen, la plausibilité de la surjectivité de l'application (1.2') est une particularité des corps finis. Par exemple, si $\mathbb{F}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$, alors l'application (1.2') n'est pas surjective pour $X = Q \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{Q}}$, où $Q \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ est la conique d'équation $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Parmi les trois, la surjectivité de l'application (1.3') est la plus mystérieuse. La surjectivité de l'application (1.3') entraîne celle de l'application (1.2'), mais l'inverse n'est a priori pas vrai : le groupe $H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$ contient des classes de cohomologie “exotiques”, qui disparaissent après passage à $\overline{\mathbb{F}}$ ; voir (4.2). L'application (1.3') est surjective pour $d = 1$, et aussi pour $d = 2$ par exemple si $b_2(\overline{X}) = \rho(\overline{X})$. (Si $V$ est une $\mathbb{F}$-variété, pour tout $j \geq 0$ et tout premier $\ell$ inversible dans $\mathbb{F}$ on note $b_j(\overline{V}) := \dim H^j(\overline{V}, \mathbb{Q}_\ell)$ le $j$-ème nombre de Betti de $\overline{V}$ et $\rho(\overline{V})$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{NS}(\overline{V}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$.) La surjectivité de l'application (1.3') en toute dimension $d \geq 3$ suit de la surjectivité en dimension $d = 3$ ; voir [CTSc21, Proposition 5.4].

Dans le cas $d = 3$, la surjectivité de l'application (1.3') est liée à l'annulation du groupe de cohomologie non-ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Plus précisément, d'après un théorème de Colliot-Thélène et Kahn [CTK13, Théorème 2.2, Proposition 3.2], si $d = 3$ on a l'implication

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{(1.3') est surjective,}$$

et l'inverse vaut si $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 2. (Si $V$ est une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, on dit que $CH_0(V)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension $i$ s'il existe un morphisme $f : W \to V$, où $W$ est une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse de dimension $\leq i$, tel que pour tout corps algébriquement clos $\Omega$ contenant $\mathbb{F}$ l'homomorphisme d'image directe $f_* : CH_0(W_\Omega)_{\mathbb{Q}} \to CH_0(V_\Omega)_{\mathbb{Q}}$ est surjectif.)

Dans [CTK13, Question 5.4], Colliot-Thélène et Kahn ont demandé :

**Question 1.1.** *Est-ce que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour toute $\mathbb{F}$-variété projective et lisse de dimension 3 ?*

Comme nous venons de le discuter, une réponse affirmative à la question 1.1 impliquerait la surjectivité des applications (1.2') et (1.3') en toute dimension. Parimala et Suresh [PS16] ont donné une réponse affirmative à la question 1.1 si $X$ est un fibré en coniques au dessus d'une surface. Pirutka [Pir16] a répondu affirmativement à la question 1.1 si $X = C \times_{\mathbb{F}} S$ où $C$ est un courbe projective et lisse, $S$ est une surface projective et lisse avec $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ supporté en dimension 0 et le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{S})$ est sans torsion.

Dans un précédent article [CTSc21], Colliot-Thélène et l'auteur du présent article ont attaqué la question suivante, cas particuliers du problème de la surjectivité de l'application (1.3') et de la question 1.1 :

**Question 1.2.** *Supposons la caractéristique de $\mathbb{F}$ différente de 2. Soit $X = C \times_{\mathbb{F}} S$, où $C$ est une courbe elliptique et $S$ est une surface d'Enriques. Est-ce-que (1.3') est surjective pour $\ell = 2$ ? Est-ce-que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) = 0$ ?*

L'intérêt de ce cas particulier est double. D'une part, c'est le cas le plus simple qui échappe au théorème de Pirutka, parce que $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 0 mais $\mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'autre part, sur le corps des complexes, Benoist et Ottem [BO20] ont utilisé ce genre de variétés pour produire de nouveaux contre-exemples à la conjecture entière de Hodge pour les cycles de dimension 1. Ces contre-exemples sont obtenus par une méthode de spécialisation, qui n'est pas disponible sur les corps finis. Ils ne peuvent donc pas être facilement adaptés pour donner des contre-exemples aux conjectures de Tate entières sur $\mathbb{F}$ (bien qu'il soit possible de les utiliser pour obtenir des contre-exemples sur des corps de nombres).

Dans [CTSc21], nous avons donné dans certains cas une réponse affirmative à la question 1.2 (plus généralement, pour $\ell$ quelconque différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$ et dans la situation où $C$ est une courbe de genre $\geq 1$ et $S$ est une surface avec $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ supporté en dimension 0), *sous l'hypothèse que la conjecture de Tate pour les surfaces est vraie.* Il s'agit donc de résultats conditionnels, dans l'esprit du théorème de Schoen. Plus précisément, soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur

$\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement, $J_C$ la jacobienne de la courbe $C$, et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. Dans [CTSc21], nous avons démontré que l'application (1.3') est surjective et que l'on a $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ sous l'une des hypothèses suivantes :

— le groupe $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 0 et $\ell$ ne divise pas l'ordre de $\mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}}$ ([CTSc21, Théorème 1.1]). Comme mentionné ci-dessus, le cas particulier $\mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}} = 0$ avait été démontré par Pirutka [Pir16],

— la conjecture de Tate pour les surfaces est vraie, $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 0 et le groupe $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J_C(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\})$ est nul ([CTSc21, Théorème 1.4]).

## 1.2. Résultats principaux.

Notre premier résultat montre l'équivalence entre la surjectivité des applications (1.2') et (1.3') pour certains produits.

**Théorème 1.3**. *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. On suppose que l'on a $\rho(\overline{S}) = b_2(\overline{S})$. Alors l'application (1.2') est surjective si et seulement si l'application (1.3') est surjective.*

En conséquence du théorème 1.3, on généralise et rend inconditionnels plusieurs résultats de [CTSc21].

**Théorème 1.4**. *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. Supposons que l'on ait $\rho(\overline{S}) = b_2(\overline{S})$ et notons $J_C$ la jacobienne de $C$ et $(\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}}$ la composante connexe du schéma de Picard de $S$, avec sa structure réduite.*

*(a) Supposons*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J_C(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}) = 0 \quad et \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}((\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}}, J_C) = 0. \tag{1.4}$$

*Alors l'application (1.3') est surjective.*

*(b) Si la condition (1.4) est satisfaite et $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 1, alors*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Si $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 0, alors $b_1(\overline{S}) = 0$, $\rho(\overline{S}) = b_2(\overline{S})$ et la composante connexe du schéma de Picard de $S$ est triviale. On obtient alors [CTSc21, Théorème 1.4] sans supposer la conjecture de Tate pour les surfaces. En conséquence, on obtient une réponse affirmative inconditionnelle à la question 1.2 dans certains cas. Dans [CTSc21], on avait obtenu l'assertion suivante sous la conjecture de Tate pour les surfaces.

**Corollaire 1.5**. *Si la caractéristique de $\mathbb{F}$ est différente de 2 et $X = C \times_{\mathbb{F}} S$, où $S$ est une surface d'Enriques et $C$ est une courbe elliptique sans points d'ordre 2 définis sur $\mathbb{F}$, la question 1.2 a réponse affirmative.*

Si la courbe elliptique $C$ a un modèle affine d'équation $y^2 = f(x)$, où $f(x)$ est un polynôme de degré 3, la condition du corollaire 1.5 est remplie si est seulement si $f(x)$ est irréductible. Ceci est un phénomène typique : pour une classe donnée de courbes $C$ et surfaces $S$, les conditions (1.4) sont généralement faciles à décrire explicitement et sont satisfaites par une partie substantielle des membres de la classe.

En combinant le théorème 1.4 et la suite exacte de [CTK13, Théorème 6.3]

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}\right) \longrightarrow H^1\left(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}\right)$$
$$\to \mathrm{Ker}\left(H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))\right) \longrightarrow \mathrm{Coker}\left(CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G\right)\{\ell\} \longrightarrow 0,$$

on obtient la conséquence suivante pour la descente galoisienne pour $CH^2(X)$.

**Corollaire 1.6.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension $1$ et $2$ respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. Supposons $\rho(\overline{S}) = b_2(\overline{S})$, que la condition (1.4) est satisfaite et que $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension $\leq 1$. Alors*

$$\mathrm{Ker}\left(CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}\right) \simeq H^1\left(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}\right)$$

*et la flèche naturelle $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$ est surjective.*

Dans la situation du corollaire 1.5, $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_2(2))_{\mathrm{tors}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et l'application $CH^2(X)\{2\} \to CH^2(\overline{X})\{2\}$ n'est donc jamais injective.

### 1.3. Idées de la démonstration.

Les méthodes utilisées dans cet article diffèrent sensiblement de celles de [CTSc21]. Dans [CTSc21], sous l'hypothèse que $CH_0(S)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 0, le point principal était l'étude, par des outils venant de la $K$-théorie algébrique, du groupe de Chow des 0-cycles de degré 0 sur la surface $S \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(C)$, groupe qui est lié à $CH^2(X)$ au moyen de la suite de localisation.

Dans cet article, on utilise une méthode globale. Le résultat clé pour la preuve du théorème 1.3 est le théorème 4.1 qui montre que, sous l'hypothèse $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$, le noyau de $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est contenu dans l'image de l'application (1.3'). La démonstration du théorème 4.1 se fait en plusieurs étapes.

— La suite spectrale d'Hochschild-Serre induit un isomorphisme

$$\theta_X : \mathrm{Ker}(H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)));$$

voir (4.1). Par la formule de Künneth $\ell$-adique, le groupe de droite admet une décomposition en trois facteurs directs

$$H^1\left(\mathbb{F}, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\right), \qquad H^1\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right)$$

et

$$H^1\left(\mathbb{F}, H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right).$$

En utilisant l'hypothèse $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$ et un célèbre théorème de Lang [Lan56b] (voir aussi [CTSS83, Théorème 5]), on montre dans les lemmes 4.2 et 4.4 que les deux premiers termes sont contenus dans l'image de l'application (1.3').

— Pour conclure, il suffit de montrer que le facteur "mixte" est contenu dans l'image de l'application (1.3'). On construit un homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} J_C(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^1\left(\mathbb{F}, H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right)$$

en utilisant la théorie de Kummer et le cup-produit en cohomologie galoisienne ; voir (4.6) et (4.8). Il n'est pas a priori clair que cet homomorphisme est compatible avec

$$\mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} J_C(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\cup} CH^2(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{(1.3')} H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

La démonstration de cette compatibilité est le cœur technique de ce travail. Pour cela, une étude systématique de la flèche $\theta_X$ est nécessaire. Ceci occupe la plus grande partie des sections 3 et 4. Notre analyse s'applique à $X$ arbitraire et donc pourrait potentiellement être utilisée pour des variétés plus générales que des produits.

— En utilisant cette description et la condition $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$, on arrive à démontrer que le terme manquant de la décomposition ci-dessus est dans l'image de l'application (1.3') si $G$ agit trivialement sur $\mathrm{NS}(\overline{S})$. Par un argument de normes utilisant l'application trace $\ell$-adique, on déduit de cela le théorème 4.1. Ce dernier argument, suggéré par Jean-Louis Colliot-Thélène, n'est pas difficile à comprendre mais un peu surprenant : les arguments de restriction-corestriction n'aident généralement pas à prouver des cas de la conjecture de Tate entière.

## Notations

Si $A$ est un groupe abélien, $n \geq 1$ est un entier, et $\ell$ est un nombre premier, on note $A[n] := \{a \in A : na = 0\}$, $A\{\ell\}$ le sous-groupe de torsion $\ell$-primaire de $A$, $A_{\mathrm{tors}}$ le sous-groupe de torsion de $A$, $A/\mathrm{tors} := A/A_{\mathrm{tors}}$, $T_\ell(A)$ le module de Tate de $A$ et $V_\ell(A) := T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Si $k$ est un corps, on note $\overline{k}$ une clôture séparable de $k$. Si $k'/k$ est une extension galoisienne de corps, $G = \mathrm{Gal}(k'/k)$ est le groupe de Galois, et $M$ est un $G$-module continu, on note $H^i(G,M)$ le $i$-ème groupe de cohomologie galoisienne de $G$ à valeurs dans $M$, et on écrit $M^G = H^0(G,M)$ pour le sous-module des éléments fixés par $G$. Si $k' = \overline{k}$, on écrit $H^i(k,M)$ pour $H^i(G,M)$.

Si $k'/k$ est une extension de corps et $X$ est un $k$-schéma, on note $X_{k'} := X \times_k k'$. Si $k' = \overline{k}$, on écrit $\overline{X}$ pour $X \times_k \overline{k}$. Si $F$ est un faisceau abélien étale sur $X$, on notera $\overline{F}$ l'image réciproque de $F$ le long du morphisme de projection $\overline{X} \to X$. Si $Y \to X$ est un morphisme de schémas, pour tout $n \geq 0$ on écrit

$$Y^n_X := Y \times_X Y \times_X \cdots \times_X Y, \qquad (n \text{ fois}).$$

Si $k$ est un corps, $\ell$ un nombre premier inversible dans $k$, et $n \geq 1$ un entier, on note $\mu_{\ell^n}$ le faisceau abélien étale des racines $\ell^n$-ièmes de l'unité. Si $i > 0$, on note $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \mu_{\ell^n} \otimes \cdots \otimes \mu_{\ell^n}$ ($i$ fois), et si $i < 0$ on note $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \mathrm{Hom}(\mu_{\ell^n}^{\otimes(-i)}, \mathbb{Z}/\ell^n)$, et $\mu_{\ell^n}^{\otimes 0} := \mathbb{Z}/\ell^n$.

Soient $k$ un corps et $X$ une $k$-variété, c'est-à-dire un $k$-schéma séparé de type fini. Si $F$ est un pre-faisceau sur $X$, on note $\check{H}^i(X,F)$ les groupes de cohomologie de Čech. Si $F$ est un faisceau sur $X$ pour la topologie étale sur $X$, on écrit $H^i(X,F)$ pour les groupes de cohomologie étale. On note $H^i(X,\mathbb{Z}_\ell(j))$ la limite projective des $H^i(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ pour $n$ tendant vers l'infini, $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) := H^i(X,\mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ et $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ la limite directe des $H^i(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes j})$.

On note $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard $H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \simeq H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ et $\mathrm{Br}(X)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. On note $CH_i(X)$ le groupe des cycles de dimension $i$ modulo équivalence rationnelle et, si $X$ est lisse et irréductible de dimension $d$, on pose $CH^i(X) := CH_{d-i}(X)$. Si $X$ est projective et géométriquement intègre, on note $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ la composante connexe du schéma de Picard de $X$ (qui existe d'après [Kle05, Theorem 5.4]) et, si $k$ est parfait, on note $(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}$ sa réduction (qui est une variété abélienne si $X$ est géométriquement normale). Si $X$ est propre, lisse et irréductible et $k$ est séparablement clos, on note $\mathrm{NS}(X)$ le groupe de Néron-Severi de $X$ (qui est un groupe abélien de type fini), $\rho(X)$ le rang de $\mathrm{NS}(X)$ et $b_i(X) := \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ les nombres de Betti de $X$.

Si $A$ et $B$ sont deux groupes algébriques sur le corps $k$, on note $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}}(A,B)$ l'ensemble des homomorphismes de $k$-groupes algébriques entre $A$ et $B$. Si $A$ et $B$ sont commutatifs, $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}}(A,B)$ admet une structure naturelle de groupe abélien. Si $k$ est séparablement clos, $A$ est une variété abélienne sur $k$ et $\ell$ est un nombre premier inversible dans $k$, on pose $T_\ell(A) := T_\ell(A(k))$ et $V_\ell(A) := T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

## Remerciements

Je tiens à remercier Kęstutis Česnavičius et le département de Mathématiques d'Orsay (université Paris-Saclay) pour leur hospitalité pendant l'année 2021. Les commentaires d'un rapporteur sur certaines parties du précédent article [CTSc21] ont suggéré le présent travail. Je lui en sais gré. Je remercie aussi Alexei Skorobogatov de m'avoir communiqué une preuve alternative du lemme 3.4, dans le cas où la caractéristique de $k$ est nulle et $C$ admet un point $k$-rationnel. Je remercie les rapporteurs du présent article pour avoir lu attentivement mon manuscrit et pour avoir donné des suggestions utiles.

Je suis très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène : il m'a suggéré qu'un argument de normes pourrait être utilisé pour démontrer le théorème 1.3, il m'a aidé par de nombreuses discussions et a contribué par beaucoup de commentaires et de corrections à cet article.

# 2. Préliminaires

## 2.1. Passage à la limite

On rappelle ici des arguments bien connus de passage à la limite en algèbre commutative et cohomologie galoisienne, qui seront utilisés plusieurs fois dans la suite.

**Lemme 2.1.** *Soient $A$ un anneau commutatif avec identité et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système projectif de $A$-modules de longueur finie.*

*(a) Si $N$ est un $A$-module de présentation finie, la flèche naturelle*

$$\varprojlim_n (M_n)\otimes_A N \to \varprojlim_n (M_n\otimes_A N)$$

*est un isomorphisme de $A$-modules.*

*(b) Si $N$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, la flèche naturelle*

$$\varprojlim_n (M_n)\otimes_{\mathbb{Z}} N \to \varprojlim_n (M_n\otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

*est un isomorphisme de $A$-modules.*

*Démonstration.* (a) Comme $N$ est de présentation finie, on dispose d'une suite exacte

$$A^r \xrightarrow{\varphi'} A^s \xrightarrow{\varphi} N \to 0. \tag{2.1}$$

Si on tensorise la suite exacte (2.1) par $\varprojlim_n M_n$, on obtient une suite exacte

$$(\varprojlim_n M_n)\otimes_A A^r \to (\varprojlim_n M_n)\otimes_A A^s \to (\varprojlim_n M_n)\otimes_A N \to 0. \tag{2.2}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soient $K_n := \ker(\mathrm{id}_{M_n}\otimes\varphi)$ et $K'_n := \ker(\mathrm{id}_{M_n}\otimes\varphi')$. Si on tensorise la suite exacte (2.1) par $M_n$, on obtient des suites exactes courtes

$$0\to K_n \to M_n\otimes_A A^s \to M_n\otimes_A N\to 0, \tag{2.3}$$

$$0\to K'_n \to M_n\otimes_A A^r \to K_n\to 0. \tag{2.4}$$

Comme $K_n\subset M_n\otimes_A A^s$ et la longueur de $M_n\otimes_A A^s\simeq M_n^s$ est finie, par [Mat89, §1.2 p.12] la longueur de $K_n$ est finie. On en déduit que la suite des $K_n$ satisfait la condition de Mittag-Leffler. Le même argument montre que la suite des $K'_n$ satisfait la condition de Mittag-Leffler. Donc, d'après [NSW08, Proposition (2.7.4)] les suites (2.3) et (2.4) restent exactes après passage à la limite projective en $n$. Ceci donne une suite exacte

$$\varprojlim_n (M_n\otimes_A A^r)\to \varprojlim_n (M_n\otimes_A A^s)\to \varprojlim_n (M_n\otimes_A N)\to 0, \tag{2.5}$$

où les homomorphismes sont induits par $\varphi'$ et $\varphi$. En combinant les suites exactes (2.2) et (2.5), on obtient un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
(\varprojlim_n M_n)\otimes_A A^r \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\varprojlim_n M_n)\otimes_A A^s \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\varprojlim_n M_n)\otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\varprojlim_n (M_n\otimes_A A^r) \arrow[r] & \varprojlim_n (M_n\otimes_A A^s) \arrow[r] & \varprojlim_n (M_n\otimes_A N) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par la propriété universelle de la limite inverse. Comme la limite inverse commute avec les sommes directes finies, les flèches verticales de gauche et du milieu sont des isomorphismes. On conclut que la flèche verticale de droite est aussi un isomorphisme, comme voulu.

(b) La structure de $A$-module sur $M_n \otimes_{\mathbb{Z}} N$ est induite par celle de $M_n$. On écrit $N \simeq \mathbb{Z}^r \oplus (\oplus_i \mathbb{Z}/m_i)$. Comme le produit tensoriel commute avec la somme directe, il suffit de montrer que pour tout $m \geq 1$ la flèche

$$\varprojlim_n (M_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \to \varprojlim_n (M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m)$$

est un isomorphisme. Ceci suit du fait que pour tout $A$-module $M$, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \simeq M \otimes_A A/mA$, du fait que $A/mA$ est un $A$-module de présentation finie et de la partie (a). $\square$

**Lemme 2.2.** *Soient $A$ un anneau commutatif avec identité, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux systèmes projectifs de $A$-modules de longueur finie tels que $M := \varprojlim_n M_n$ et $N := \varprojlim_n N_n$ sont des $A$-modules de présentation finie. Alors la flèche naturelle*

$$M \otimes_A N \to \varprojlim_n (M_n \otimes_A N_n)$$

*est un isomorphisme de $A$-modules.*

*Démonstration.* On a une chaîne d'isomorphismes de $A$-modules :

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \varprojlim_m (M_m \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_m (\varprojlim_n (M_m \otimes_A N_n)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(m,n)} (M_m \otimes_A N_n) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (M_n \otimes_A N_n).$$

Le premier et le deuxième isomorphisme viennent du lemme 2.1, le troisième est un cas particulier de la formule pour la limite sur une catégorie produit et le dernier suit du fait que la suite des $(n,n)$ pour $n \geq 1$ est cofinale dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\square$

**Lemme 2.3.** *Soient $G = \hat{\mathbb{Z}}$ et $\sigma \in G$ un générateur topologique.*

*(a) Si $M$ est un $G$-module continu fini, alors*

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G, & i = 0, \\ M/(1-\sigma)M, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2. \end{cases}$$

*En particulier, $H^i(G, M)$ est fini pour tout $i \geq 0$.*

*(b) Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système projectif de $\mathbb{Z}_\ell$-modules finis avec action continue de $G$, tel que le $\mathbb{Z}_\ell$-module $M := \varprojlim_n M_n$ est de type fini. Alors pour tout $i \geq 0$ la flèche naturelle*

$$H^i(G, M) \longrightarrow \varprojlim_n H^i(G, M_n)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* (a) L'assertion $H^0(G, M) = M^G$ est évidente, et $H^i(G, M) = 0$ pour tout $i \geq 2$ parce que $\mathrm{cd}(G) = 1$. On a un homomorphisme $\varphi : H^1(G, M) \to M/(1-\sigma)M$ défini comme suit : si $\alpha \in H^1(G, M)$ est représenté par le cocycle $\left\{\alpha_g\right\}_{g\in G}$ à valeurs dans $M$, on pose $\varphi(\alpha) := \alpha_\sigma + (1-\sigma)M$. On vérifie aisément qui $\varphi$ est bien défini et un isomorphisme de groupes.

(b) Ceci suit de (a) et de [NSW08, Corollary (2.7.6)]. $\square$

## 2.2. Application trace

Soient $f : X' \to X$ un morphisme fini étale de schémas et $F$ un faisceau abélien étale sur $X$. On écrit

$$\mathrm{tr}_f : f_* f^* F \to F$$

pour indiquer le morphisme trace, défini dans [SGA 4III, IX, 5.1]. Il est univoquement caractérisé par la compatibilité avec tout changement de base étale et par le fait que si $X' = \coprod_{j=1}^d X$ et $f$ est l'identité sur chaque terme, alors l'application induite $f_* f^* F \simeq F^d \to F$ est la somme.

Comme $f$ est fini, $f_*$ est exact. On a alors pour tout $i \geq 0$ un isomorphisme $H^i(X, f_* f^* F) \simeq H^i(X', f^* F)$, et donc un homomorphisme induit

$$\mathrm{tr}_f : H^i(X', f^* F) \to H^i(X, F).$$

Une définition équivalente de $\mathrm{tr}_f$ est donnée dans [SGA 4III, XVII, Théorème 6.2.3] : comme $f$ est fini étale, la flèche naturelle $f_! \to f_*$ est un isomorphisme, et alors $\mathrm{tr}_f$ est induit par l'homomorphisme d'adjonction $f_* f^* \simeq f_! f^* \to \mathrm{id}$.

D'après [SGA 4III, XVII, Théorème 6.2.3 (Var 1) et (Var 2)], $\mathrm{tr}_f$ est covariant en $F$ et commute avec tout changement de base.

Soient $\ell$ un nombre premier inversible dans $k$ et $j \in \mathbb{Z}$. La fonctorialité de $\mathrm{tr}_f$ nous donne, pour tout $n \geq 0$, un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H^i\left(X', \mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes j}\right) \arrow[r, "\mathrm{tr}_f"] \arrow[d] & H^i\left(X, \mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes j}\right) \arrow[d] \\ H^i\left(X', \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right) \arrow[r, "\mathrm{tr}_f"] & H^i\left(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right), \end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant induites par l'homomorphisme de puissance $\ell$-ième. Par passage à la limite projective en $n$, on obtient un homomorphisme

$$\mathrm{tr}_f : H^i(X', \mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)).$$

## 2.3. Application cycle

Soient $k$ un corps, $X$ une $k$-variété lisse équidimensionnelle et $n$ un entier inversible dans $k$. Pour tout $i \geq 0$, on note

$$\mathrm{cl}_X : CH^i(X) \to H^{2i}\left(X, \mu_n^{\otimes i}\right)$$

l'application cycle en cohomologie étale, définie de façon cohomologique dans [Del77, Chapitre 4, §2.2.10], ou en termes d'homologie et dualité de Poincaré dans le paragraphe après [Del77, Chapitre 4, (2.3.1.3)]. Comme on peut le vérifier à l'aide de la définition cohomologique, les applications $\mathrm{cl}_X : CH^i(X) \to H^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$ forment un système inverse de flèches compatibles pour $n$ variable. Si $\ell$ est un nombre premier inversible dans $k$, on notera

$$\mathrm{cl}_X : CH^i(X) \to H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

l'homomorphisme obtenu par passage à la limite sur $n = \ell^m$, $m \geq 0$.

**Lemme 2.4.** *Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini étale de $k$-variétés lisses équidimensionnelles. Pour tout $i \geq 0$ et tout nombre premier $\ell$ inversible dans $k$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} CH^i(X') \arrow[r, "\mathrm{cl}_{X'}"] \arrow[d, "f_*"] & H^{2i}(X', \mathbb{Z}_\ell(i)) \arrow[d, "\mathrm{tr}_f"] \\ CH^i(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_X"] & H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)) \end{tikzcd}$$

*commute.*

*Démonstration.* Pour tout entier $n \geq 1$ inversible dans $k$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} CH^i(X') \arrow[r, "\mathrm{cl}^h_{X'}"] \arrow[d, "f_*"] & H_{2i}(X', i, n) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f_*"] & H^{2i}\left(X', \mu_n^{\otimes i}\right) \arrow[d, "\mathrm{tr}_f"] \\ CH^i(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^h_X"] & H_{2i}(X, i, n) \arrow[r, "\sim"] & H^{2i}\left(X, \mu_n^{\otimes i}\right). \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Ici $H_{2i}(X',i,n)$ et $H_{2i}(X,i,n)$ sont les groupes d'homologie étale et les isomorphismes horizontaux de droite proviennent de la dualité de Poincaré ; voir [BO74, Example (2.1)]. Dans (2.6), la commutativité du carré de droite est une conséquence de [SGA 4III, XVIII, Lemme 3.2.3]. La commutativité du carré de gauche suit de la fonctorialité de l'homologie étale par rapport aux morphismes propres [BO74, p. 185 ligne 20] et du fait que, si $Y' \subset X'$ est un sous-schéma fermé intègre de codimension $i$, $Y := f(Y')$ avec sa structure réduite, $\eta_Y$ et $\eta_{Y'}$ sont les classes fondamentales homologiques de $Y$ et $Y'$ (voir [BO74, (1.3.4) et p. 186 ligne -2]) et $g := f|_{Y'} : Y' \to Y$, alors $g_*(\eta_{Y'}) = \deg(g) \cdot \eta_Y$ (voir [BO74, (7.1.2)]) et $f_*([Y']) = \deg(g) \cdot [Y]$.

Les flèches horizontales composées dans (2.6) sont $\mathrm{cl}_{X'}$ et $\mathrm{cl}_X$. On conclut par passage à la limite projective dans (2.6) en $n = \ell^m$, $m \geq 1$. □

## 2.4. Hochschild-Serre

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ des foncteurs exacts à gauche. Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont suffisamment d'injectifs et que $F(I)$ est $G$-acyclique pour tout injectif $I$ de $\mathcal{A}$. Alors pour tout objet $A$ de $\mathcal{A}$ on a la suite spectrale de Grothendieck (voir [SP, 015N]) :

$$E_2^{p,q} = (R^pG)(R^qF)(A) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(A). \tag{2.7}$$

Soient $k$ un corps, $X$ une $k$-variété et $F$ un faisceau abélien étale sur $X$. On a la suite spectrale d'Hochschild-Serre :

$$E_2^{p,q} = H^p\left(k, H^q(\overline{X}, \overline{F})\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, F). \tag{2.8}$$

On rappelle ici la construction de la suite spectrale (2.8) donnée dans [SGA 4II, VIII, Proposition 8.4] ; elle nous sera utile dans la preuve du lemme 3.1. Pour toute extension galoisienne finie $k'/k$, la projection $X_{k'} \to X$ est un morphisme couvrant dans le petit site étale sur $X$. Par [SGA 4I, V, Corollaire 3.4], on a la suite spectrale de Cartan-Leray (cas particulier de la suite spectrale (2.7)) :

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p\left(X_{k'}/X, \mathcal{H}^q(X, F)\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, F). \tag{2.9}$$

Ici $\mathcal{H}^q(X, F)$ est le préfaisceau étale sur $X$ qui à tout morphisme étale de type fini $V \to X$ associe $H^q(V, F|_V)$. Un calcul standard montre que le complexe de Čech du faisceau $\mathcal{H}^q(X, F)$ associé au morphisme $X_{k'} \to X$ est isomorphe au complexe de cochaînes homogènes de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ dans $H^q(X_{k'}, F|_{X_{k'}})$. Cet isomorphisme est rappelé en détail dans [Mil80, Example III.2.6]. On obtient des isomorphismes

$$\check{H}^p\left(X_{k'}/X, \mathcal{H}^q(X, F)\right) \simeq H^p\left(\mathrm{Gal}(k'/k), H^q(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right) \tag{2.10}$$

pour tout $p, q \geq 0$. Par conséquent la suite spectrale (2.9) induit une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p\left(\mathrm{Gal}(k'/k), H^q(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, F). \tag{2.11}$$

La suite spectrale (2.8) est obtenue comme limite inductive des suite spectrales (2.11), où $k'/k$ parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{k}/k$.

Une deuxième construction de la suite spectrale (2.8) comme cas particulier de la suite spectrale (2.7) est mentionnée à la fin de la preuve de [SGA 4II, VIII, Proposition 8.4]. L'équivalence des deux constructions est implicite dans [SGA 4II, VIII, Proposition 8.4] et n'est pas difficile à démontrer.

Le lemme suivant est responsable du signe dans l'énoncé du lemme 3.1.

**Lemme 2.5.** *Dans la situation de la suite spectrale* (2.7)*, soit*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{2.12}$$

*une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. Alors pour tout entier $i \geq 1$ on a un carré anticommutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ker}\Big(R^i(G\circ F)(C) \to G(R^{i-1}F)(C)\Big) & \longrightarrow & (R^1G)(R^{i-1}F)(C) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ker}\Big(R^{i+1}(G\circ F)(A) \to G(R^iF)(A)\Big) & \longrightarrow & (R^1G)(R^iF)(A).
\end{array}$$

*Ici les flèches verticales sont induites par les homomorphismes de connexion dans la suite exacte longue associée à la suite* (2.12)*, la flèche horizontale du bas est la composée*

$$\operatorname{Ker}\Big(R^{i+1}(G\circ F)(A) \to G(R^iF)(A)\Big) \twoheadrightarrow E_\infty^{1,i} \subset (R^1G)(R^iF)(A)$$

*induite par* (2.7) *et celle du haut est définie de la même manière.*

*Démonstration.* Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I_A^\bullet & \longrightarrow & I_B^\bullet & \longrightarrow & I_C^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes et les homomorphismes verticales sont résolutions injectives dans $\mathcal{A}$. Soit encore

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J_A^{\bullet,\bullet} & \xrightarrow{\iota^{\bullet,\bullet}} & J_B^{\bullet,\bullet} & \xrightarrow{\pi^{\bullet,\bullet}} & J_C^{\bullet,\bullet} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F(I_A^\bullet) & \longrightarrow & F(I_B^\bullet) & \longrightarrow & F(I_C^\bullet) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagramme commutatif où les lignes horizontales sont exactes et les homomorphismes verticales sont résolutions de Cartan-Eilenberg dans $\mathcal{B}$ ; voir [SP, 015G].

On suit les conventions de signe de [SP, 010V, OFNB]. Donc $J_A^{\bullet,\bullet}$ est un complexe double concentré dans le quadrant $p,q \geq 0$, avec des homomorphismes $d_1^{p,q} : J_A^{p,q} \to J_A^{p+1,q}$ et $d_2^{p,q} : J_A^{p,q} \to J_A^{p,q+1}$ satisfaisant

$$d_1^{p+1,q} \circ d_1^{p,q} = 0, \quad d_2^{p,q+1} \circ d_2^{p,q} = 0, \quad d_2^{p,q+1} \circ d_1^{p,q} = d_1^{p+1,q} \circ d_2^{p,q}.$$

Le complexe total associé est $(\operatorname{Tot}^\bullet(J_A^{\bullet,\bullet}), d)$, où

$$\operatorname{Tot}^n(J_A^{\bullet,\bullet}) := \bigoplus_{p+q=n} J_A^{p,q}, \qquad d^n := \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q} + (-1)^p d_2^{p,q}).$$

La même discussion s'applique après avoir remplacé $A$ par $B$ ou $C$.

Comme $J_A^{\bullet,\bullet}$, $J_B^{\bullet,\bullet}$ et $J_C^{\bullet,\bullet}$ sont des résolutions de Cartan-Eilenberg, pour tout $q \geq 0$ on peut trouver des homomorphismes de complexes

$$s^q = (s^{p,q})_{p\geq 0} : J_C^{\bullet,q} \to J_B^{\bullet,q}, \qquad r^q = (r^{p,q})_{p\geq 0} : J_B^{\bullet,q} \to J_A^{\bullet,q}$$

satisfaisant $\pi^{\bullet,q} \circ s^q = \mathrm{id}_{J_C^{\bullet,q}}$ et $r^q \circ \iota^{\bullet,q} = \mathrm{id}_{J_A^{\bullet,q}}$. Soient $(J_A^{\bullet,\bullet}[0,1], d_1[0,1], d_2[0,1])$ le complexe double défini par

$$J_A^{\bullet,\bullet}[0,1]^{p,q} = J_A^{p,q+1}, \qquad d_1[0,1] = d_1, \quad d_2[0,1] = -d_2$$

et $\delta : J_C^{\bullet,\bullet} \to J_A^{\bullet,\bullet}[0,1]$ le morphisme de complexes doubles donné par $\delta^n := r^{n+1} \circ d^n_{J_B^{\bullet,\bullet}} \circ s^n$. Le fait que $\delta$ est un morphisme suit d'un calcul direct ; voir [SP, 011J].

Soit encore

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tot}(J_A^{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{\operatorname{Tot}(\iota^{\bullet,\bullet})} \operatorname{Tot}(J_B^{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{\operatorname{Tot}(\pi^{\bullet,\bullet})} \operatorname{Tot}(J_C^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow 0$$

la suite exacte courte induite au niveau des complexes totaux,

$$(s')^n := \sum_{p+q=n} s^{p,q}, \qquad (r')^n := \sum_{p+q=n} r^{p,q}$$

et $\delta' : \mathrm{Tot}(J_C^{\bullet,\bullet}) \to \mathrm{Tot}(J_A^{\bullet,\bullet})[1]$ le morphisme de complexes $(\delta')^n := (r')^{n+1} \circ d^n_{\mathrm{Tot}(J_B^{\bullet,\bullet})} \circ (s')^n$ ; voir encore [SP, 011J]. Ici, pour un complexe $(K, d_K)$, le complexe $(K[1], d_K[1])$ est défini par $(K[1])^n = K^{n+1}$ et $(d_K[1])^n = -d_K^{n+1}$.

Les homomorphismes $\delta$ et $\delta'$ sont uniquement définis à homotopie près par [SP, 011L] et induisent les homomorphismes de bord provenant du lemme du serpent par [SP, 011K]. Pour tout $p, q \geq 0$, soit $(\delta')^{p,q}$ la restriction de $(\delta')^{p+q}$ à $J_C^{p,q}$. Par un calcul direct, explicité dans la quatrième partie de [SP, 0G6A], on a

$$(\delta')^{p,q} = (-1)^p \delta^{p,q}$$

pour tout $p, q \geq 0$. En particulier, $(\delta')^{1,i-1} = -\delta^{1,i-1}$.

Par application de $G$ on obtient une suite exacte courte de complexes doubles

$$0 \longrightarrow G(J_A^{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{G(\iota)} G(J_B^{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{G(\pi)} G(J_C^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow 0.$$

La conclusion suit du fait que la suite spectrale (2.7) pour $A$, $B$ et $C$ est définie comme la deuxième suite spectrale pour $G(J_A^{\bullet,\bullet})$, $G(J_B^{\bullet,\bullet})$ et $G(J_C^{\bullet,\bullet})$, respectivement (voir [SP, 015N]), et du fait que dans le carré de l'énoncé du lemme, la flèche de gauche est induite par $G((\delta')^{1,i-1})$ et celle de droite par $G(\delta^{1,i-1})$. □

## 2.5. Cohomologie de Čech

Soient $k$ un corps et $X$ une $k$-variété quasi-projective. D'après un théorème dû à Artin [Art71, Corollary 4.2] (voir aussi [Mil80, Theorem III.2.17]), pour tout faisceau abélien étale $F$ sur $X$ et pour tout $i \geq 0$ on a un isomorphisme fonctoriel

$$\check{H}^i(X, F) \xrightarrow{\sim} H^i(X, F). \tag{2.13}$$

Cet isomorphisme est le morphisme de coin dans la suite spectrale de Cartan-Leray

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(X, \mathcal{H}^q(X, F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F),$$

et Artin montre que l'on a $E_2^{p,q} = 0$ pour tout $p \geq 0$ et $q \geq 1$. En particulier, les isomorphismes (2.13) sont compatibles avec les morphismes de coin dans la suite spectrale (2.9).

Pour toute suite exacte courte de faisceaux abéliens étales

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0,$$

on déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

(2.14)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \check{H}^i(X,F') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{H}^i(X,F) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{H}^i(X,F'') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \check{H}^{i+1}(X,F') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i(X,F') \arrow[r] & H^i(X,F) \arrow[r] & H^i(X,F'') \arrow[r] & H^{i+1}(X,F') \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes de bord dans la suite exacte du haut sont induits par les cobords de Čech usuels ; *cf.* [God73, §5.11].

## 3. L'application $\theta_X$

Soient $k$ un corps, $X$ une $k$-variété et $F$ un faisceau abélien étale sur $X$. La suite spectrale (2.8) donne, pour tout $i \geq 0$, des homomorphismes

$$\theta_X : \operatorname{Ker}\left(H^{i+1}(X,F) \to H^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right) \twoheadrightarrow E_\infty^{1,i} \subset H^1\left(k, H^i(\overline{X},\overline{F})\right) \tag{3.1}$$

fonctoriels en $X$ et $F$. Comme la suite spectrale (2.8) est la limite inductive des suites spectrales (2.11), $\theta_X$ est la limite inductive des homomorphismes

$$\theta_{X,k'} : \operatorname{Ker}\left(H^1(X,F) \to H^1(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right) \twoheadrightarrow E_\infty^{1,i} \subset H^1\left(\operatorname{Gal}(k'/k), H^1(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right)$$

provenant de la suite spectrale (2.11), où $k'/k$ parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{k}/k$.

On veut donner une description en cohomologie de Čech de l'homomorphisme (3.1). Pour tout entier $i \geq 0$, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\left(\check{H}^{i+1}(X,F) \to \check{H}^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[r, "\check{\theta}_X"] \arrow[d, "\wr"] & H^1\left(k, \check{H}^i(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[d, "\wr"] \\ \operatorname{Ker}\left(H^{i+1}(X,F) \to H^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[r, "\theta_X"] & H^1\left(k, H^i(\overline{X},\overline{F})\right). \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Ici les flèches verticales sont induites par les isomorphismes (2.13) et $\check{\theta}_X$ est définie comme suit. Soient $\alpha \in \check{H}^{i+1}(X,F)$ qui devient nul dans $\check{H}^{i+1}(\overline{X},\overline{F})$, $U \to X$ un morphisme étale surjectif de type fini tel que $\alpha$ est représenté par $\beta \in F(U_X^{i+2})$ et $\gamma \in \overline{F}(\overline{U}_{\overline{X}}^{i+1})$ tel que l'image $\overline{\beta}$ de $\beta$ dans $\overline{F}(\overline{U}_{\overline{X}}^{i+2})$ est égale à $d(\gamma)$, où $d$ est le cobord de Čech. Comme $\overline{\beta}$ est défini sur $k$, il est $G$-invariant, et donc pour tout $g \in G$ on a

$$d(g(\gamma)-\gamma) = g(d(\gamma)) - d(\gamma) = g(\beta) - \beta = 0 \text{ dans } \overline{F}(\overline{U}_{\overline{X}}^{i+1}).$$

Donc $g(\gamma)-\gamma$ est un cocycle de Čech pour tout $g \in G$. Si $c$ est un cocycle (de Čech ou galoisien), on note $[c]$ la classe de cohomologie associée. Pour tout $g,h \in G$, on a

$$(gh)(\gamma) - \gamma = g(\gamma) - \gamma + g(h(\gamma)-\gamma),$$

donc $\{[g(\gamma)-\gamma]\}_{g\in G}$ est un cocycle galoisien. On définit

$$\check{\theta}_X(\alpha) := \left[\left\{[g(\gamma)-\gamma]\right\}_{g\in G}\right] \in H^1\left(k, \check{H}^i(\overline{X},\overline{F})\right). \tag{3.3}$$

On peut aisément vérifier que cette définition ne dépend que de $\alpha$. De la même manière, pour toute extension galoisienne finie $k'/k$ on peut définir un homomorphisme

$$\check{\theta}_{X,k'} : \operatorname{Ker}\left(\check{H}^{i+1}(X,F) \to \check{H}^{i+1}(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right) \longrightarrow H^1\left(\operatorname{Gal}(k'/k), H^i(X_{k'}, F|_{X_{k'}})\right)$$

en remplaçant partout $\overline{k}$ par $k'$ dans (3.3). Il est immédiat de vérifier que $\check{\theta}_X$ est la limite inductive des $\check{\theta}_{X,k'}$, où $k'/k$ parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{k}/k$.

**Lemme 3.1.** *Soient $X$ une $k$-variété quasi-projective, $F$ un faisceau abélien étale sur $X$ et $i \geq 0$ un entier. Le carré (3.2) $(-1)^i$-commute.*

*Démonstration.* On pose

$$\begin{aligned} \check{H}_0^{i+1}(X,F) &:= \operatorname{Ker}\left(\check{H}^{i+1}(X,F) \longrightarrow \check{H}^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right), \\ H_0^{i+1}(X,F) &:= \operatorname{Ker}\left(H^{i+1}(X,F) \longrightarrow H^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right). \end{aligned}$$

Soit

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow F' \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

une suite exacte courte de faisceaux abéliens étales sur $X$, où $I$ est donné par la construction de Godement pour $F$ ; voir [Mil80, Remark III.1.20(c)]. Le faisceau $I$ est un produit de faisceaux gratte-ciel étales sur $X$ ; donc $I$ est flasque. Il s'en suit que $\overline{I}$ est un produit de faisceaux gratte-ciel étales sur $\overline{X}$ et donc $\overline{I}$ est aussi flasque. Le foncteur d'image réciproque étant exact, la suite (3.4) induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \overline{F} \longrightarrow \overline{I} \longrightarrow \overline{F'} \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

de faisceaux abéliens étales sur $\overline{X}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\check{H}_0^{i+1}(X,F) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & H^1\left(k,\check{H}^i(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[ddd] \\
& \check{H}_0^{i}(X,F') \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[d] & H^1\left(k,\check{H}^{i-1}(\overline{X},\overline{F'})\right) \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& H_0^{i}(X,F') \arrow[r] \arrow[dl] & H^1\left(k,H^{i-1}(\overline{X},\overline{F'})\right) \arrow[dr] & \\
H_0^{i+1}(X,F) \arrow[rrr] & & & H^1\left(k,H^i(\overline{X},\overline{F})\right),
\end{tikzcd}$$

où les flèches obliques sont induites par les morphismes de bord dans le diagramme (2.14) associé aux suites (3.4) et (3.5) et les flèches horizontales et verticales viennent du diagramme (3.2) pour $(F,i)$ et $(F',i-1)$. Les carrés de gauche et de droite commutent d'après le diagramme (2.14), la commutativité du carré du haut suit d'un calcul explicite avec les cocycles et le carré du bas anticommute par le lemme 2.5. Comme $I$ et $\overline{I}$ sont flasques, les flèches obliques de gauche sont des isomorphismes pour tout $i \geq 1$. Par récurrence sur $i$, on se réduit alors à démontrer la commutativité du carré (3.2) dans le cas $i = 0$.

Supposons donc $i = 0$. Dans ce cas, $\theta_X$ est un isomorphisme et son inverse est un homomorphisme de coin dans la suite spectrale (2.8). Comme $\theta_X$ est la limite inductive des $\theta_{X,k'}$ et $\check{\theta}_X$ est la limite inductive des $\check{\theta}_{X,k'}$, il suffit de prouver, pour toute extension galoisienne finie $k'/k$, la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\left(\check{H}^1(X,F) \to \check{H}^1(X_{k'},F)\right) \arrow[r, "\check{\theta}_{X,k'}"] \arrow[d, "\wr\ \varphi"] & H^1\left(\mathrm{Gal}(k'/k),F(X_{k'})\right) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Ker}\left(H^1(X,F) \to H^1(X_{k'},F|_{X_{k'}})\right) \arrow[r, "\theta_{X,k'}"] & H^1\left(\mathrm{Gal}(k'/k),F(X_{k'})\right),
\end{tikzcd}$$

où $\varphi$ est induit par l'isomorphisme (2.13). Comme la suite spectrale (2.11) est isomorphe à la suite spectrale (2.9), on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\left(H^1(X,F) \to H^1(X_{k'},F|_{X_{k'}})\right) \arrow[r, "\theta_{X,k'}"] \arrow[d, equal] & H^1\left(\mathrm{Gal}(k'/k),F(X_{k'})\right) \arrow[d, "\wr\ \rho"] \\
\operatorname{Ker}\left(H^1(X,F) \to \check{H}^0\left(X_{k'}/X,\mathcal{H}^1(X,F)\right)\right) \arrow[r, "\eta_{X,k'}"] & \check{H}^1(X_{k'}/X,F),
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme $\eta_{X,k'}$ vient de la suite spectrale (2.9) et $\rho$ provient de l'isomorphisme (2.10). On se réduit donc à prouver la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\left(\check{H}^1(X,F) \to \check{H}^1(X_{k'},F)\right) \arrow[r, "\check{\theta}_{X,k'}"] \arrow[d, "\wr\ \varphi"] & H^1\left(\mathrm{Gal}(k'/k),F(X_{k'})\right) \arrow[d, "\wr\ \rho"] \\
\operatorname{Ker}\left(H^1(X,F) \to \check{H}^0\left(X_{k'}/X,\mathcal{H}^1(X,F)\right)\right) \arrow[r, "\eta_{X,k'}"] & \check{H}^1(X_{k'}/X,F).
\end{tikzcd}$$

L'inverse de $\eta_{X,k'}$ est un homomorphisme de coin dans la suite spectrale (2.9) et $\varphi$ est défini comme la limite inductive des homomorphismes de coin $\check{H}^1(U/X,F) \to H^1(X,F)$, où $U \to X$ est un morphisme étale surjectif de type fini. Il s'en suit que l'inverse de $\eta_{X,k'} \circ \varphi$ est l'homomorphisme canonique $\check{H}^1(X_{k'}/X,F) \to \check{H}^1(X,F)$, c'est-à-dire l'homomorphisme induit par l'identité au niveau des cocycles de Čech. Pour conclure, il suffit alors de montrer que le triangle

$$\begin{tikzcd} \check{H}^1(X_{k'}/X,F) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\wr"] & H^1\left(\mathrm{Gal}(k'/k), F(X_{k'})\right) \\ \mathrm{Ker}\left(\check{H}^1(X,F) \to \check{H}^1(X_{k'},F|_{X_{k'}})\right) \arrow[ur, "\check{\theta}_{X,k'}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

commute.

L'isomorphisme $\rho$ provient de l'identification (2.10) du complexe de Čech pour $F$ le long de $X_{k'} \to X$ avec le complexe des cochaînes inhomogènes pour le $\mathrm{Gal}(k'/k)$-module $F(X_{k'})$ ; voir [Mil80, Example III.2.6]. Plus précisément, soient $\alpha \in \check{H}^1(X_{k'}/X,F)$ et $\beta \in F(X_{k'} \times_X X_{k'})$ un cocycle de Čech représentant $\alpha$. Notons $\Gamma := \mathrm{Gal}(k'/k)$. L'isomorphisme

$$X_{k'} \times \Gamma \xrightarrow{\sim} X_{k'} \times_X X_{k'}, \quad (s,g) \mapsto (s,sg)$$

induit un isomorphisme

$$F(X_{k'} \times_X X_{k'}) \xrightarrow{\sim} F(X_{k'} \times \Gamma) \simeq F(X_{k'}) \times \Gamma$$

qui envoie $\beta$ vers $((\mathrm{id},g)^*(\beta))_{g\in\Gamma}$. Ici $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{X_{k'}}$ est l'identité de $X_{k'}$ et $g : X_{k'} \to X_{k'}$ est l'isomorphisme induit par $g \in \Gamma$. Alors $\{(\mathrm{id},g)^*(\beta)\}_{g\in\Gamma}$ est un $\Gamma$-cocycle et

$$\rho(\alpha) = \left[\{(\mathrm{id},g)^*(\beta)\}_{g\in\Gamma}\right] \in H^1\left(\Gamma, F(X_{k'})\right).$$

La flèche verticale dans le triangle (3.6) envoie $\alpha$ sur $[\beta] \in \check{H}^1(X,F)$. Comme $d(\beta_{k'}) = 0$, il existe $\gamma \in F(X_{k'})$ tel que l'on ait $d(\gamma) = \beta_{k'}$. Par définition, $\check{\theta}_{X,k'}([\beta]) = \left[\{[g(\gamma)-\gamma]\}_{g\in G}\right]$. Le diagramme commutatif de [Mil80, Example III.2.6] contient le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F(X_{k'}) \arrow[r, "p_0^*-p_1^*"] \arrow[d, equal] & F(X_{k'} \times_X X_{k'}) \arrow[d, "((\mathrm{id},g)^*)_{g\in\Gamma}"] \\ F(X_{k'}) \arrow[r, "(g^*-\mathrm{id}^*)_{g\in\Gamma}"] & F(X_{k'}) \times \Gamma. \end{tikzcd}$$

On en déduit que l'on a $g(\gamma) - \gamma = (\mathrm{id},g)^*(\beta)$ pour tout $g \in \Gamma$, donc $\theta_{X,k'}([\beta]) = \rho(\alpha)$. Ceci prouve la commutativité du triangle (3.6) et achève la démonstration. □

## 3.1. Compatibilités

Les deux lemmes suivants montrent que $\theta_X$ est compatible avec les cup-produits et l'application trace en cohomologie étale.

**Lemme 3.2.** *Soient $k$ un corps, $X$ une $k$-variété quasi-projective, $F$ et $F'$ deux faisceaux abéliens pour la topologie étale sur $X$, puis $\alpha \in H^q(X,F')$, et $\overline{\alpha}$ l'image de $\alpha$ dans $H^q(\overline{X},\overline{F'})$. Alors pour tout $i \geq 0$ le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}(X,F) \to H^{i+1}(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "(-)\cup\alpha"] & H^1\left(k, H^i(\overline{X},\overline{F})\right) \arrow[d, "(-)\cup\overline{\alpha}"] \\ \mathrm{Ker}\left(H^{i+q+1}(X,F\otimes_{\mathbb{Z}} F') \to H^{i+q+1}(\overline{X},\overline{F}\otimes_{\mathbb{Z}}\overline{F'})\right) \arrow[r, "\theta_X"] & H^1\left(k, H^{i+q}(\overline{X},\overline{F}\otimes_{\mathbb{Z}}\overline{F'})\right) \end{tikzcd}$$

$(-1)^q$*-commute.*

On rappelle que, d'après [SGA 4I, Exposé IV, Proposition 13.4 (c)], on a un isomorphisme canonique $\overline{F \otimes_{\mathbb{Z}} F'} \simeq \overline{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{F'}$.

*Démonstration.* L'isomorphisme (2.13) respecte le cup-produit par [Mil80, Remark V.1.19(a)]. On note encore $\alpha \in \check{H}^q(X, F')$ la classe de Čech correspondant à $\alpha$. D'après le lemme 3.1, il suffit alors de vérifier l'égalité $\check{\theta}_X(\beta) \cup \overline{\alpha} = \check{\theta}_X(\beta \cup \alpha)$ pour tout $\beta \in \mathrm{Ker}(\check{H}^{i+1}(X, F) \to \check{H}^{i+1}(\overline{X}, \overline{F}))$.

Soient $U \to X$ un morphisme étale surjectif de type fini tel que $\alpha$ soit représenté par un cocycle $\alpha_0 \in F'(U_X^{q+1})$ et $\overline{\alpha}_0$ l'image de $\alpha_0$ dans $\overline{F'}(\overline{U}_X^{q+1})$. Soient $\beta_0 \in F(U_X^{i+1})$ un cocycle qui représente $\beta$, $\overline{\beta}_0$ l'image de $\beta_0$ dans $\overline{F}(\overline{U}_X^{i+1})$ et $\gamma \in \overline{F}(\overline{U}_X^{i+1})$ tel que l'on ait $d(\gamma) = \overline{\beta}_0$. Notons

$$\mathrm{pr}_1 : U_X^{i+q+1} \to U_X^{i+1}, \qquad \mathrm{pr}_2 : U_X^{i+q+1} \to U_X^{q+1}$$

les projections sur les $i+1$ premiers et $q+1$ derniers facteurs, respectivement. Comme $\check{\theta}_X(\beta)$ est représenté par $\{[g(\gamma) - \gamma]\}_{g \in G}$, on voit que $\check{\theta}_X(\beta) \cup \overline{\alpha}$ est représenté par

$$\left\{[(g(\mathrm{pr}_1^*(\gamma)) - \mathrm{pr}_1^*(\gamma)) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\overline{\alpha}_0)]\right\}_{g \in G}. \tag{3.7}$$

D'un autre côté, comme $d(\overline{\alpha}_0) = 0$, la classe $\check{\theta}_X(\beta \cup \alpha)$ est représentée par

$$\left\{[g(\mathrm{pr}_1^*(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\overline{\alpha}_0)) - \mathrm{pr}_1^*(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\overline{\alpha}_0)]\right\}_{g \in G}. \tag{3.8}$$

Comme $\overline{\alpha}_0$ est dans l'image de $F'(U_X^{q+1}) \to \overline{F'}(\overline{U}_X^{q+1})$, on a $g(\overline{\alpha}_0) = \overline{\alpha}_0$ pour tout $g \in G$. On conclut que les cocycles (3.7) et (3.8) coïncident et donc que l'on a $\check{\theta}_X(\beta) \cup \overline{\alpha} = \check{\theta}_X(\beta \cup \alpha)$, comme voulu. □

**Lemme 3.3.** *Soient $k$ un corps, $f : X' \to X$ un morphisme fini étale de $k$-variétés lisses et quasi-projectives, $\ell$ un nombre premier inversible dans $k$, $i \geq 0$ et $j$ des entiers.*

*(a) Le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}(X', \mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^{i+1}(\overline{X'}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right) & \xrightarrow{\theta_{X'}} & H^1\left(k, H^i(\overline{X'}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}_f} & & \big\downarrow{\scriptstyle H^1(\mathrm{tr}_{\overline{f}})} \\ \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^{i+1}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right) & \xrightarrow{\theta_X} & H^1\left(k, H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right). \end{array}$$

*commute.*

*(b) Soient $k \subset k' \subset \overline{k}$ une extension finie et séparable et $H \subset G$ le groupe de Galois absolu de $k'$. Supposons que $X' = X_{k'}$ et que $f$ est la projection naturelle. Alors l'isomorphisme $G$-équivariant canonique*

$$H^i(\overline{X'}, \mathbb{Z}_\ell(j)) \simeq \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))$$

*identifie la flèche verticale de droite dans (a) avec la flèche induite par la norme*

$$\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j)) \longrightarrow H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j)).$$

*Démonstration.* (a) Soit $n \geq 1$ un entier. L'homomorphisme $\theta_X$ est compatible avec tout homomorphisme de faisceaux abéliens étales sur $X$, et donc en particulier avec $\mathrm{tr}_f : f^* f_* \mu_{\ell^n} \to \mu_{\ell^n}$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}\left(X', \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right) \to H^{i+1}\left(\overline{X'}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) & \xrightarrow{\theta_{X'}} & H^1\left(k, H^i\left(\overline{X'}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}_f} & & \big\downarrow{\scriptstyle H^1(\mathrm{tr}_{\overline{f}})} \\ \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}\left(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right) \to H^{i+1}\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) & \xrightarrow{\theta_X} & H^1\left(k, H^i\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right). \end{array} \tag{3.9}$$

Comme $\theta_X$, $\mathrm{tr}_f$ et $\mathrm{tr}_{\overline{f}}$ sont fonctoriels par rapport aux homomorphismes $\mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes j} \to \mu_{\ell^n}^{\otimes j}$ de puissance $\ell$-ième, les carrés (3.9) avec $n \geq 1$ variable forment un système inverse de diagrammes commutatifs compatibles.

On veut passer à la limite projective sur $n \geq 1$ dans le carré (3.9). Le foncteur de limite projective étant exact à gauche, on a une identification canonique

$$\varprojlim_n \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}\left(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right) \to H^{i+1}\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) \simeq \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^{i+1}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right)$$

et de même en remplaçant $X$ par $X'$. Les groupes $H^i(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ sont finis pour tout $i \geq 1$. D'après [NSW08, Corollary (2.7.6)] on a alors

$$\varprojlim_n H^1\left(k, H^i\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) \simeq H^1\left(k, H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))\right)$$

et de même pour $X'$. Le carré commutatif de (a) est obtenu par passage à la limite sur $n \geq 1$ dans le carré (3.9).

(b) L'identification canonique suit de la décomposition $G$-équivariante $\overline{X'} = \coprod_{g \in R} \overline{X}^g$, où $R \subset G$ est un ensemble de représentants modulo $H$. Pour conclure, il suffit d'observer que, comme le morphisme $\overline{f} : \overline{X'} \to \overline{X}$ obtenu par changement de base de $f$ est un recouvrement étale trivial, pour tout faisceau étale $F$ sur $X$ l'application induite $\overline{f}_* \overline{f}^* \overline{F} \simeq \overline{F}^{[G:H]} \to \overline{F}$ est la somme. $\square$

## 3.2. Le cas d'une courbe

Soient $k$ un corps, $G$ le groupe de Galois absolu de $k$, $C$ une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur $k$ et $J_C$ la jacobienne de $C$. La suite exacte courte $G$-équivariante

$$0 \longrightarrow J_C(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{C}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

identifie $J_C(\overline{k})$ au groupe des diviseurs de degré 0 sur $\overline{C}$, modulo équivalence rationnelle. Par passage aux $G$-invariants dans la suite (3.10), on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Pic}(C) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & J_C(k) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{C})^G \arrow[r, "\deg"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

où la suite du bas est exacte, et donc un homomorphisme injectif

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\right) \hookrightarrow J_C(k). \tag{3.11}$$

Soit $n$ un entier inversible dans $k$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\deg"] & \mathrm{Pic}(C)/n \arrow[r, equal] \arrow[d, "\deg"] & \mathrm{Pic}(C)/n \arrow[r, "\mathrm{cl}_C"] \arrow[d] & H^2(C, \mu_n) \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n & \mathrm{Pic}(\overline{C})/n \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{cl}_{\overline{C}}"] & H^2(\overline{C}, \mu_n) \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

qui induit un homomorphisme

$$\mathrm{cl}_C : \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(H^2(C, \mu_n) \to H^2(\overline{C}, \mu_n)\right).$$

La suite de Kummer $1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$ donne un isomorphisme $H^1(\overline{C}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{C}, \mathbb{G}_m)[n]$. La suite obtenue par passage à la $n$-torsion dans la suite (3.10) est encore exacte, et donne alors un isomorphisme $J_C(\overline{k})[n] \simeq H^1(\overline{C},\mathbb{G}_{\mathrm{m}})[n]$. On obtient un isomorphisme

$$H^1(\overline{C},\mu_n) \xrightarrow{\sim} H^1\left(\overline{C},\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\right)[n] \xrightarrow{\sim} J_C(\overline{k})[n]. \tag{3.13}$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\right)/n \arrow[rr, "\mathrm{cl}_C"] \arrow[d] & & \mathrm{Ker}\left(H^2(C,\mu_n) \to H^2(\overline{C},\mu_n)\right) \arrow[d, "\theta_C"] \\
J_C(k)/n \arrow[r] & H^1\left(k, J_C(\overline{k})[n]\right) & H^1\left(k, H^1(\overline{C},\mu_n)\right). \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Ici, l'homomorphisme vertical de gauche est induit par la flèche (3.11). Dans la ligne du bas de (3.14), la flèche de gauche est induite par la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow J_C[n] \longrightarrow J_C \xrightarrow{\times n} J_C \longrightarrow 1,$$

et la flèche de droite est obtenue par passage à la cohomologie galoisienne dans l'isomorphisme (3.13).

**Lemme 3.4**. *Soit $C$ une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur le corps $k$ et soit $J_C$ la jacobienne de $C$. Pour tout entier $n \geq 1$ inversible dans $k$, le diagramme* (3.14) *commute.*

*Démonstration.* Soit $D \in \mathrm{Pic}(C)$ tel que $\deg(D) = 0$. Dans le diagramme (3.14), la flèche composée

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\right)/n \to J_C(k)/n \to H^1\left(k, J_C(\overline{k})[n]\right)$$

envoie $D$ sur la classe représentée par le cocycle $\left\{[g(\tilde{D}) - \tilde{D}]\right\}_{g\in G}$, où $\tilde{D} \in J_C(\overline{k})$ satisfait $n\tilde{D} = D$.

D'après le lemme 3.1 pour $i = 1$, il suffit de prouver que le diagramme obtenu de (3.14) en remplaçant la cohomologie des faisceaux par la cohomologie de Čech anticommute. Soient $U \to C$ un morphisme étale surjectif de type fini, et $\lambda \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U^2_C)$ un cocycle représentant $D$ dans $\check{H}^1(C,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. Pour tout $h \in \{0,1\}$ et $i, j \in \{0,1,2\}$, les projections

$$p_h : U^2_C \to U \quad \text{et} \quad p_{ij} : U^3_C \to U^2_C$$

induisent des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mu_n(U) \arrow[r, "p_h^*"] \arrow[d, hook] & \mu_n(U^2_C) \arrow[r, "p_{ij}^*"] \arrow[d, hook] & \mu_n(U^3_C) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U) \arrow[r, "p_h^*"] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U^2_C) \arrow[r, "p_{ij}^*"] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U^3_C).
\end{tikzcd}$$

On note $\overline{p}_h^*$ et $\overline{p}_{ij}^*$ les flèches correspondantes au niveau $\overline{k}$.

Le fait que $\lambda$ est un cocycle s'écrit

$$p_{12}^*(\lambda)p_{02}^*(\lambda)^{-1}p_{01}^*(\lambda) = 1 \text{ dans } \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U^3_C).$$

Quitte à raffiner $U$, on peut supposer qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U^2_C)$ tel que $\lambda = \lambda_1^n$. On appelle $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}_1$ les images de $\lambda$ et $\lambda_1$ dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{U}^2_C)$, respectivement. (On note que $\lambda_1$ et $\overline{\lambda}_1$ ne respectent pas nécessairement la condition de cocycle.) Soit encore $\tilde{\lambda} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{U}^2_C)$ un cocycle représentant $\tilde{D}$ dans $\check{H}^1(\overline{C},\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. Comme $D = n\tilde{D}$, $[\overline{\lambda}] = [\tilde{\lambda}^n]$ dans $\check{H}^1(\overline{C},\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, et donc il existe $\xi \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{U})$ tel que l'on ait

$$\overline{\lambda} = \overline{p}_1^*(\xi)\overline{p}_0^*(\xi)^{-1}\tilde{\lambda}^n \text{ dans } \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{U}^2_C).$$

Quitte à raffiner $U$, on peut supposer qu'il existe $\xi_1 \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{U})$ tel que $\xi = \xi_1^n$. On définit

$$\nu := \overline{\lambda}_1(\overline{p}_1^*(\xi_1)\overline{p}_0^*(\xi_1)^{-1}\tilde{\lambda})^{-1} \in \mu_n(\overline{U}^2_C). \tag{3.15}$$

Par la définition des homomorphismes de bord en cohomologie de Čech, $\mathrm{cl}_C([\lambda])$ est représenté par le cocycle

$$p_{12}^*(\lambda_1)p_{02}^*(\lambda_1)^{-1}p_{01}^*(\lambda_1) \in \mu_n(U_C^3).$$

L'image de ce cocycle dans $\mu_n(\overline{U}_{\overline{C}}^3)$ est le cocycle

$$\overline{p}_{12}^*(\overline{\lambda}_1)\overline{p}_{02}^*(\overline{\lambda}_1)^{-1}\overline{p}_{01}^*(\overline{\lambda}_1) \in \mu_n(\overline{U}_{\overline{C}}^3).$$

On a

$$\overline{p}_{12}^*\left(\overline{p}_1^*(\xi_1)\overline{p}_0^*(\xi_1)^{-1}\right)\overline{p}_{02}^*\left(\overline{p}_1^*(\xi_1)\overline{p}_0^*(\xi_1)^{-1}\right)^{-1}\overline{p}_{01}^*\left(\overline{p}_1^*(\xi_1)\overline{p}_0^*(\xi_1)^{-1}\right) = 1$$

et on sait que $\overline{p}_{12}^*(\tilde{\lambda})\overline{p}_{02}^*(\tilde{\lambda})^{-1}\overline{p}_{01}^*(\tilde{\lambda}) = 1$ parce que $\tilde{\lambda}$ est un cocycle. On déduit de la définition (3.15) que l'on a

$$\overline{p}_{12}^*(\overline{\lambda}_1)\overline{p}_{02}^*(\overline{\lambda}_1)^{-1}\overline{p}_{01}^*(\overline{\lambda}_1) = \overline{p}_{12}^*(\nu)\overline{p}_{02}^*(\nu)^{-1}\overline{p}_{01}^*(\nu) \text{ dans } \mu_n(\overline{U}_{\overline{C}}^3). \tag{3.16}$$

Comme $\nu \in \mu_n(\overline{U}_{\overline{C}}^2)$, la classe $\check{\theta}_C(\mathrm{cl}_C[\lambda]) \in H^1(k, \check{H}^1(\overline{C}, \mu_n))$ est représentée par le cocycle $\{[g(\nu)/\nu]\}_{g\in G}$.

L'isomorphisme $\check{H}^1(\overline{C}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\overline{C}, \mathbb{G}_\mathrm{m})[n]$ est induit par l'inclusion $\mu_n \subset \mathbb{G}_\mathrm{m}$ : si $c \in \mu_n(\overline{U}_{\overline{C}}^2)$, l'image de $[c] \in \check{H}^1(\overline{C}, \mu_n)$ est la classe de $c$ dans $\check{H}^1(\overline{C}, \mathbb{G}_\mathrm{m})$, où on voit $c$ comme un élément de $\mathbb{G}_\mathrm{m}(\overline{U}_{\overline{C}}^2)$. Donc l'image de $\check{\theta}_C(\mathrm{cl}_C[\lambda])$ dans $H^1(k, \check{H}^1(\overline{C}, \mathbb{G}_\mathrm{m})[n])$ est $\left\{[g(\nu)/\nu]\right\}_{g\in G}$, où on voit chaque $g(\nu)/\nu$ comme un élément de $\mathbb{G}_\mathrm{m}(\overline{U}_{\overline{C}}^2)$.

Comme $\overline{\lambda}_1 \in \mathbb{G}_\mathrm{m}(\overline{U}_{\overline{C}}^2)$ est l'image de $\lambda_1 \in \mathbb{G}_\mathrm{m}(U_C^2)$, on a $g(\overline{\lambda}_1) = \overline{\lambda}_1$ pour tout $g \in G$. D'après la définition (3.15), pour tout $g \in G$ on a alors l'égalité

$$\frac{g(\nu)}{\nu} = \frac{g\left(\overline{p}_1^*(\xi_1)^{-1}\overline{p}_0^*(\xi_1)\right)}{\overline{p}_1^*(\xi_1)^{-1}\overline{p}_0^*(\xi_1)} \cdot \frac{g(\tilde{\lambda}^{-1})}{\tilde{\lambda}^{-1}} \text{ dans } \mathbb{G}_\mathrm{m}(\overline{U}_{\overline{C}}^2),$$

donc

$$[g(\nu)/\nu] = [g(\tilde{\lambda}^{-1})/\tilde{\lambda}^{-1}] \text{ dans } \check{H}^1(\overline{C}, \mathbb{G}_\mathrm{m})[n].$$

On conclut que l'image de $\check{\theta}_C(\mathrm{cl}_C([\lambda]))$ dans $H^1(k, \check{H}^1(\overline{C}, \mathbb{G}_\mathrm{m})[n])$ est représentée par $\left\{[g(\tilde{\lambda}^{-1})/\tilde{\lambda}^{-1}]\right\}_{g\in G}$. Comme $\tilde{D}$ est représenté par $\tilde{\lambda}$, l'image de $\check{\theta}_C(\mathrm{cl}_C([\lambda]))$ dans $H^1(k, J(\overline{k})[n])$ est représentée par $\left\{[g(-\tilde{D}) - (-\tilde{D})]\right\}_{g\in G} = \left\{-[(g(\tilde{D}) - \tilde{D})]\right\}_{g\in G}$. Ceci montre que le diagramme obtenu de (3.14) par passage à la cohomologie de Čech anticommute, donc que le diagramme (3.14) commute. $\square$

## 4. Preuve du théorème 1.3

Le but de cette section est la démonstration du théorème suivant et, par conséquent, du théorème 1.3.

**Théorème 4.1.** *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, $\ell$ un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}$, $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. Sous l'hypothèse $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$, le noyau de $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est contenu dans l'image de l'application cycle*

$$\mathrm{cl}_X : CH^2(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Soit $X$ une variété projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$. Comme $\mathrm{cd}(\mathbb{F}) = 1$, pour tout faisceau abélien fini $F$ sur $X$ et pour tout $i \geq 0$ l'homomorphisme $\theta_X$ de (3.1) est un isomorphisme. Soit $j$ un entier. Pour tout $n \geq 1$, on pose $F = \mu_{\ell^n}^{\otimes j}$ dans (3.1). On obtient un système inverse d'isomorphismes

$$\theta_X : \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}\left(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right) \to H^{i+1}\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right) \xrightarrow{\sim} H^1\left(\mathbb{F}, H^i\left(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}\right)\right).$$

En utilisant le lemme 2.3(b), la finitude de la cohomologie étale à coefficients $\mu_{\ell^n}^{\otimes j}$ pour les $\mathbb{F}$-variétés projectives lisses et l'exactitude à gauche du foncteur de limite projective, on obtient par passage à la limite projective un isomorphisme

$$\theta_X : \mathrm{Ker}\left(H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^{i+1}(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(j))\right) \xrightarrow{\sim} H^1\left(\mathbb{F},H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(j))\right). \tag{4.1}$$

Comme $\mathbb{F}$ est fini, $H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_\ell(j)) \longrightarrow H^{i+1}(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(j))^G$ est surjectif par le lemme 2.3(b). On déduit de l'isomorphisme (4.1) l'existence d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^1\left(\mathbb{F},H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(j))\right) \xrightarrow{\iota_X} H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_\ell(j)) \longrightarrow H^{i+1}(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(j))^G \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

où $\iota_X$ est induit par l'inverse de $\theta_X$. Comme $\theta_X$ est fonctoriel en $X$, la suite (4.2) est naturelle en $X$.

Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement, et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. Comme $H^*(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion, par la formule de Künneth $\ell$-adique [Mil80, Corollary VI.8.13] on a des isomorphismes Galois-équivariants

$$H^3\left(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2)\right) \simeq H^3\left(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)\right) \oplus \left[H^2\left(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1\left(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1)\right)\right] \oplus H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)), \tag{4.3}$$

$$H^4\left(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2)\right) \simeq H^4\left(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)\right) \oplus \left[H^3\left(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1\left(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1)\right)\right] \oplus H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)). \tag{4.4}$$

induits par projections et cup-produits. Nous allons obtenir le théorème 4.1 comme conséquence des trois lemmes suivants.

**Lemme 4.2.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. L'image de (1.3') contient le facteur direct $H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$ de $H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$.*

*Démonstration.* Par un théorème de Kato et Saito [KS83] (voir aussi [CTSS83, Théorème 5]), l'application cycle $CH^2(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^4(S,\mathbb{Z}_\ell(2))$ est un isomorphisme. Pour nos besoins, il nous suffira de savoir que cette application cycle est surjective, ce qui a été démontré par Lang [Lan56b]. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
CH^2(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[r, "\mathrm{cl}_S"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_S^*"] & H^4(S,\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[d, "\mathrm{pr}_S^*"] & H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))\right) \arrow[l, "\iota_S"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_S^*"] \\
CH^2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[r, "\mathrm{cl}_X"] & H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) & H^1(\mathbb{F},H^3\left(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\right), \arrow[l, "\iota_X"']
\end{tikzcd}$$

où le carré de gauche commute par [Mil80, Proposition VI.9.2] (dont la preuve vaut sur un corps de base quelconque) et le carré de droite commute par la naturalité de la suite exacte (4.2). Ceci implique que $H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$ est dans l'image de (1.3'), comme voulu. □

*Remarque* 4.3. Soit $X = Y \times_{\mathbb{F}} C$, où $C$ est une courbe projective, lisse et géométriquement connexe, $Y$ est une variété projective, lisse et géométriquement connexe de dimension $d$ telle que l'image de l'application (1.3') pour $Y$ contient le sous-groupe

$$H^1\left(\mathbb{F},H^{2d-1}(\overline{Y},\mathbb{Z}_\ell(d))\right) \subset H^{2d}(Y,\mathbb{Z}_\ell(d)).$$

L'argument de la preuve du lemme 4.2 montre que le facteur direct de Künneth

$$H^1\left(\mathbb{F},H^{2d-1}(\overline{Y},\mathbb{Z}_\ell(d))\right) \subset H^1\left(\mathbb{F},H^{2d+1}(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(d))\right)$$

est dans l'image de l'application (1.3') pour $X$.

**Lemme 4.4.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. L'image de l'application (1.3') contient le facteur direct $H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right)$ de $H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$.*

*Démonstration.* La suite de Kummer induit, par passage à la limite projective, une suite exacte

$$\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow T_\ell(\mathrm{Br}(S)). \tag{4.5}$$

Montrons que l'application composée

$$H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right) \xrightarrow{\iota_S} H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow T_\ell(\mathrm{Br}(S))$$

est nulle. Un argument de poids, utilisant les conjectures de Weil démontrées par Deligne [Del74], montre que $H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right)$ est un groupe fini ; voir [CTSS83, p. 781]. Comme tout module de Tate, le groupe $T_\ell(\mathrm{Br}(S))$ est sans torsion. L'exactitude de la suite (4.5) entraîne donc que $H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right)$ est dans l'image de

$$\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1)).$$

D'après la borne de Hasse–Weil, il existe un 0-cycle $\zeta \in \mathrm{Pic}(C)$ de degré 1 ; voir par exemple [Sou84, 1.5.3. Lemme 1]. Soit $\overline{\mathrm{cl}_C(\zeta)}$ l'image de $\mathrm{cl}_C(\zeta)\in H^2(C,\mu_n)$ dans $H^2(\overline{C},\mu_n)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[r, "\mathrm{cl}_S"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_S^*(-)\cup \mathrm{pr}_C^*(\xi)"] & H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1)) \arrow[d, "\mathrm{pr}_S^*(-)\cup \mathrm{pr}_C^*(\mathrm{cl}_C(\zeta))"] & H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right) \arrow[l, "\iota_S"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\overline{S}}^*(-)\cup \mathrm{pr}_{\overline{C}}^*(\overline{\mathrm{cl}_C(\zeta)})"] \\
CH^2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[r, "\mathrm{cl}_X"] & H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) & H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\right). \arrow[l, "\iota_X"']
\end{tikzcd}$$

Le carré de gauche commute par [Mil80, Proposition VI.9.4] (dont la preuve vaut sur un corps de base quelconque) et le carré de droite commute par les lemmes 3.2 et 2.3(b). Ceci implique que $H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\right)$ est dans l'image de l'application (1.3'). ☐

*Remarque* 4.5.

(i) Plus précisément, $H^1\left(\mathbb{F},H^1(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$ est dans l'image du noyau de la flèche composée

$$\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)).$$

(ii) Soit $X = Y\times_{\mathbb{F}} C$, où $C$ est une courbe projective, lisse et géométriquement connexe, $Y$ est une variété projective, lisse et géométriquement connexe de dimension $d$ telle que $H^1(\mathbb{F},H^{2d-3}(\overline{Y},\mathbb{Z}_\ell(d-1)))$ est dans l'image de l'application (1.3') pour $Y$. Alors l'argument de la preuve du lemme 4.4 montre que le facteur de Künneth $H^1\left(\mathbb{F},H^{2d-3}(\overline{Y},\mathbb{Z}_\ell(d-1))\right)\subset H^1\left(\mathbb{F},H^{2d-1}(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(d))\right)$ est dans l'image de l'application (1.3') pour $X$.

**Lemme 4.6.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement et $X := C\times_{\mathbb{F}} S$. Supposons que l'on ait $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$ et que $G$ agisse trivialement sur* $\mathrm{NS}(\overline{S})$. *Alors l'image de l'application* (1.3') *contient le facteur direct $H^1\left(\mathbb{F},H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\right)$ de $H^1\left(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\right)$.*

*Démonstration.* Soit $n$ un entier inversible dans $\mathbb{F}$. On pose

$$\mathrm{Pic}_0(C) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(C)\xrightarrow{\deg}\mathbb{Z}\right),$$

$$(CH^2(X)/n)_0 := \mathrm{Ker}\left(CH^2(X)/n \longrightarrow CH^2(\overline{X})/n\right),$$

$$H_0^2(C,\mu_n) := \mathrm{Ker}\left(H^2(C,\mu_n)\longrightarrow H^2(\overline{C},\mu_n)\right),\quad \text{et}$$

$$H_0^4\left(X,\mu_n^{\otimes 2}\right) := \mathrm{Ker}\left(H^2\left(X,\mu_n^{\otimes 2}\right)\longrightarrow H^2\left(\overline{X},\mu_n^{\otimes 2}\right)\right).$$

Considérons le diagramme commutatif

(4.6)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} J_C(\mathbb{F})/n \arrow[d, "\wr"] & & \mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}_0(C)/n \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\mathrm{cl}_S\otimes\mathrm{cl}_C"] & (CH^2(X)/n)_0 \arrow[d, "\mathrm{cl}_X"] \\
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, J_C(\overline{\mathbb{F}})[n]\big) & & H^2(S,\mu_n)\otimes_{\mathbb{Z}} H^2_0(C,\mu_n) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\overline{(-)}\otimes\theta_C"] & H^4_0\big(X,\mu_n^{\otimes 2}\big) \arrow[dd, "\theta_X"] \\
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mu_n)\big)\big) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\cup"] \arrow[rr] & & H^2(\overline{S},\mu_n)^G\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mu_n)\big) \arrow[d, "\cup"] & \\
H^1\big(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mu_n)\big)\big) \arrow[rr] & & H^1\big(\mathbb{F}, H^2(\overline{S},\mu_n)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mu_n)\big) \arrow[r] & H^1\big(\mathbb{F}, H^3\big(\overline{X},\mu_n^{\otimes 2}\big)\big).
\end{tikzcd}$$

La flèche horizontale supérieure gauche est (3.11). Comme $\mathrm{Br}(\mathbb{F})=0$, les flèches naturelles $\mathrm{Pic}(C)\to\mathrm{Pic}(\overline{C})^G$ et $\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(\overline{S})^G$ sont bijectives. En particulier l'homomorphisme (3.11) est un isomorphisme pour $C$. Le rectangle de gauche est induit par (3.14) et commute d'après le lemme 3.4, le carré commutatif supérieur droit vient de la compatibilité de l'application cycle et du cup-produit. La commutativité du carré inférieur gauche suit de la fonctorialité du cup-produit en cohomologie galoisienne, et celle du carré inférieur droit se déduit de la commutativité, pour tout $\alpha\in H^2(S,\mu_n)$, du carré

$$\begin{tikzcd}
H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mu_n)\big) \arrow[r, "\iota_C"] \arrow[d, "H^1(\overline{\alpha}\cup\mathrm{pr}^*_{\overline{C}}(-))"] & H^2(C,\mu_n) \arrow[d, "\alpha\cup\mathrm{pr}^*_C(-)"] \\
H^1\big(\mathbb{F}, H^3(\overline{X},\mu_n)\big) \arrow[r, "\iota_C"] & H^4(X,\mu_n),
\end{tikzcd}$$

ce qui suit du lemme 3.2.

On veut passer à la limite sur $n=\ell^m$, $m\geq 0$, dans le diagramme (4.6). Comme $\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})$ est divisible, en tensorisant la suite exacte courte

$$0\longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})\longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})\longrightarrow \mathrm{NS}(\overline{S})\longrightarrow 0 \tag{4.7}$$

par le groupe fini $H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m})$, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m})\simeq \mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m}).$$

Comme $\mathrm{NS}(\overline{S})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, le lemme 2.1(b) entraîne

$$\varprojlim_m \Big(\mathrm{Pic}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m})\Big)\simeq \mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell).$$

Les groupes $J_C(\mathbb{F})$ et $J_C(\overline{\mathbb{F}})[n]$ sont finis, $\mathrm{Pic}(S)=H^0(\mathbb{F},\mathrm{Pic}(\overline{S}))$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, les groupes de cohomologie étale des variétés $\overline{C},\overline{S}$ et $\overline{X}$ à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$ sont finis, et ceux à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini. Par passage à la limite dans le diagramme commutatif (4.6) sur $n=\ell^m$, $m\geq 0$,

en utilisant les lemmes 2.1, 2.2 et 2.3(b), on obtient alors le diagramme commutatif suivant :
(4.8)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} J_C(\mathbb{F})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}_0(C)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\mathrm{cl}_S\otimes\mathrm{cl}_C"] & \varprojlim (CH^2(X)/\ell^m)_0 \arrow[d, "\mathrm{cl}_X"] \\
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{F}, T_\ell(J_C)) & H^2(S,\mathbb{Z}_\ell(1))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^2_0(C,\mathbb{Z}_\ell(1)) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\overline{(-)}\otimes\theta_C"] & H^4_0(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[dd, "\theta_X"] \\
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] \arrow[d, "\cup"] & H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))^G\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[d, "\cup"] & \\
H^1\big(\mathbb{F}, \mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[r] & H^1\big(\mathbb{F}, H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[r] & H^1\big(\mathbb{F}, H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\big).
\end{tikzcd}$$

Ici

$$\begin{aligned}
H^2_0(C,\mathbb{Z}_\ell(1)) &:= \mathrm{Ker}\big(H^2(C,\mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow H^2(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big),\\
H^4_0(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) &:= \mathrm{Ker}\big(H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))\big).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de démontrer que la composée

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[r] & H^1\big(\mathbb{F}, \mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \arrow[d] \\
& H^1\big(\mathbb{F}, H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big)
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

apparaissant dans le coin inférieur gauche du diagramme (4.8) est surjective.

Par [Mil80, Corollary V.3.28(d)], le conoyau de la flèche injective $\mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \to H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))$ est sans torsion. Comme $\rho(\overline{S}) = b_2(\overline{S})$, cette injection est un isomorphisme, ce qui implique que la deuxième flèche dans (4.9) est un isomorphisme.

Comme $\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})$ est de torsion et $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, on a un isomorphisme $G$-équivariant $\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \simeq \mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}$ et donc le théorème de Lang [Lan56a, Theorem 2] appliqué à $(\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}}$ donne $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}(\overline{\mathbb{F}})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell) = 0$. On tensorise la suite (4.7) par $\mathbb{Z}_\ell$ et on passe à la cohomologie galoisienne. On en déduit que la flèche naturelle $\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{NS}(\overline{S})^G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell$ est surjective. Pour montrer la surjectivité de l'homomorphisme (4.9) et conclure, il suffit alors d'établir la surjectivité de la flèche

$$\mathrm{NS}(\overline{S})^G\otimes_{\mathbb{Z}} H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big) \longrightarrow H^1\big(\mathbb{F}, \mathrm{NS}(\overline{S})\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big)$$

donnée par le cup-produit en cohomologie galoisienne.

Par hypothèse le groupe $G$ agit trivialement sur $\mathrm{NS}(\overline{S})$. En écrivant $\mathrm{NS}(\overline{S})$ comme la somme directe de son sous-groupe de torsion et d'un sous-module libre, on se réduit à vérifier que pour tout $m \geq 1$, la flèche naturelle

$$\varphi_m : H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))\big)/\ell^m \longrightarrow H^1\big(\mathbb{F}, H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m})\big)$$

est un isomorphisme. Comme $H^2(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ est sans torsion, par [Mil80, Lemma V.1.11] la flèche naturelle

$$H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1))/\ell^m \longrightarrow H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m})$$

est un isomorphisme. On a alors une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1)) \xrightarrow{\times\ell^m} H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow H^1(\overline{C},\mu_{\ell^m}) \longrightarrow 0.$$

Par passage à la cohomologie galoisienne, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right)/\ell^m \xrightarrow{\varphi_m} H^1\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mu_{\ell^m})\right) \longrightarrow H^2\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right).$$

La conclusion suit du fait que, d'après le lemme 2.3, on a

$$H^2\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))\right) \simeq \varprojlim_m H^2\left(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mu_{\ell^m})\right) = 0. \qquad \square$$

**Lemme 4.7.** *Soient $E/\mathbb{F}$ une extension finie et $M$ un $G$-module continu de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$. La flèche de corestriction $\nu : H^1(E, M) \longrightarrow H^1(\mathbb{F}, M)$ est surjective.*

*Démonstration.* Soit $H := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/E)$, et soit $M_0$ le noyau de la flèche $\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M$ induite par la norme $\mathbb{Z}[G/H] \to \mathbb{Z}$. La flèche $\nu$ s'identifie à l'homomorphisme induit $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} M) \to H^1(\mathbb{F}, M)$. Comme $M_0 \simeq \varprojlim_n M_0/\ell^n$ et $M_0/\ell^n$ est fini pour tout $n \geq 1$, le lemme 2.3(a) donne $H^2(\mathbb{F}, M_0) = 0$. La suite exacte longue en cohomologie galoisienne associée à

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

nous permet de conclure. $\square$

*Démonstration du théorème 4.1.* Soient $E/\mathbb{F}$ une extension finie et $f : X_E \to X$ la projection. Par les lemmes 2.4 et 3.3(a), on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
CH^2(X_E) \arrow[r, "\mathrm{cl}_{X_E}"] \arrow[d, "f_*"] & H^4(X_E, \mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[d, "\mathrm{tr}_f"] & H^1\left(E, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\right) \arrow[l, "\iota_{X_E}"'] \arrow[d, "H^1(\mathrm{tr}_{\overline{f}})"] \\
CH^2(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_X"] & H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) & H^1\left(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\right). \arrow[l, "\iota_X"']
\end{tikzcd}$$

Par les lemmes 3.3(b) et 4.7, la flèche verticale à droite est surjective. Il suffit alors de montrer que l'image de $\mathrm{cl}_{X_E}$ contient l'image de $\iota_{X_E}$. On choisit une extension $E/\mathbb{F}$ telle que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/E)$ agit trivialement sur $\mathrm{NS}(\overline{S})$. En remplaçant $\mathbb{F}$ par $E$, on peut alors supposer que $G$ agit trivialement sur $\mathrm{NS}(\overline{S})$. Vue la décomposition de Künneth (4.3), la conclusion suit des lemmes 4.2, 4.4 et 4.6. $\square$

*Démonstration du théorème 1.3.* D'après le théorème 4.1, l'image de l'application (1.3') contient l'image de $\iota_X$. La conclusion suit de l'exactitude de la suite (4.2). $\square$

## 5. Preuve du théorème 1.4

**Lemme 5.1.** *Soit $V$ une variété projective, lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}$. Alors on a un isomorphisme $G$-équivariant $H^1(\overline{V}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq T_\ell((\mathrm{Pic}^0_{V/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}})$.*

*Démonstration.* Pour tout $n \geq 1$, la suite de Kummer donne $H^1(\overline{V}, \mu_{\ell^n}) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{V})[\ell^n]$ qui est un isomorphisme de $G$-modules. Par passage à la limite projective sur $n \geq 1$, on obtient $H^1(\overline{V}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq T_\ell(\mathrm{Pic}(\overline{V}))$. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_V(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{V})\{\ell\} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où $M$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Comme $M$ est fini, $T_\ell(M) = 0$. Pour tout $n \geq 1$, les foncteurs de $\ell^n$-torsion et de limite projective sont exacts à gauche, donc le foncteur $T_\ell(-)$ est exact à gauche. On conclut que l'on a

$$H^1\left(\overline{V}, \mathbb{Z}_\ell(1)\right) \simeq T_\ell\left(\mathrm{Pic}(\overline{V})\right) \simeq T_\ell\left(\left(\mathrm{Pic}^0_{V/\mathbb{F}}\right)_{\mathrm{red}}\right). \qquad \square$$

**Lemme 5.2.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension $1$ et $2$ respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. On suppose que l'on a*

$$\mathrm{Hom}_G\Big(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J_C(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}\Big) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}\Big(\big(\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}}\big)_{\mathrm{red}}, J_C\Big) = 0.$$

*Alors*

$$\Big(H^3\big(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1\big(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell\big)\Big)^G = 0.$$

*Démonstration.* D'après [Gro68, (8.12)] ou [CTSk21, Prop. 5.2.10], on a un isomorphisme de $G$-modules

$$H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}} \simeq \mathrm{Hom}\Big(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)\Big).$$

D'après le lemme 5.1, on a $H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq T_\ell(J_C(\overline{\mathbb{F}}))$, donc

$$H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}\Big(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J_C(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}\Big).$$

On en déduit

$$\Big(H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell)\Big)^G = 0. \tag{5.1}$$

Soit $A := (\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}}$. Le théorème de Tate [Tate66, Main Theorem] donne

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}(A, J_C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \simeq \mathrm{Hom}_G\Big(T_\ell(\overline{A}), T_\ell(J_{\overline{C}})\Big).$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}(A, J_C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell &\simeq \mathrm{Hom}_G\Big(V_\ell(\overline{A}), V_\ell(J_{\overline{C}})\Big) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_G\Big(H^1(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(1)), H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell(1))\Big) \\
&\simeq \Big(H^1(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(1))^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell(1))\Big)^G \\
&\simeq \Big(H^3(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell(1))\Big)^G \\
&\simeq \Big(H^3(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(2)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)\Big)^G
\end{aligned}$$

Ici le premier isomorphisme suit du fait que les $\mathbb{Z}_\ell$-modules $T_\ell(\overline{A})$ et $T_\ell(J_{\overline{C}})$ sont de type fini, le deuxième isomorphisme vient du lemme 5.1, et l'isomorphisme $G$-équivariant $H^1(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(1))^\vee \simeq H^3(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est donné par la dualité de Poincaré $\ell$-adique pour la surface $S$ ; voir [Del74, Théorème (2.3)]. Par hypothèse, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}(A, J_C) = 0$, donc

$$\Big(H^3(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell(2)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)\Big)^G = 0.$$

Il s'en suit que

$$\Big((H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))/\mathrm{tors}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell)\Big)^G = 0. \tag{5.2}$$

On tensorise la suite exacte courte de $G$-modules

$$0 \longrightarrow H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}} \longrightarrow H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \longrightarrow H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))/\mathrm{tors} \longrightarrow 0$$

par le $\mathbb{Z}_\ell$-module libre $H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell)$ et on passe aux $G$-invariants. La conclusion suit de la combinaison de (5.1) et (5.2). □

**Lemme 5.3.** *Soient $C$ et $S$ deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension $1$ et $2$ respectivement et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$. On suppose que l'on a $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$ et*

$$\mathrm{Hom}_G\Big(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J_C(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}\Big) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}-\mathrm{gr}}\Big((\mathrm{Pic}^0_{S/\mathbb{F}})_{\mathrm{red}}, J_C\Big) = 0.$$

*Alors l'application cycle*

$$\mathrm{cl}_X : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^4\big(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)\big)^G$$

*est surjective.*

*Démonstration.* La formule de Künneth en cohomologie $\ell$-adique nous donne un isomorphisme $G$-équivariant
$$H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \simeq H^4(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \oplus \left[H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell)\right] \oplus H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1)).$$
Par le lemme (5.2) on obtient
$$H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \simeq H^4(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \oplus H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G.$$
On a le carré commutatif
$$\begin{array}{ccc} (CH^2(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell) \oplus (\mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & CH^2(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^4(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \oplus H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G & \xrightarrow{\sim} & H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G, \end{array}$$
où les flèches verticales sont les applications cycle et les flèches horizontales sont induites par l'image réciproque et le cup-produit. Comme $\mathbb{F}$ est fini, d'après les estimations de Lang–Weil, $S$ admet un 0-cycle de degré 1 (voir [Sou84, 1.5.3. Lemme 1]) et donc la flèche de degré $CH^2(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G = \mathbb{Z}_\ell$ est surjective. Comme $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$, par [Mil80, Corollary V.3.28(d)] la flèche $\mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G$ est aussi surjective. On conclut alors que la flèche verticale de droite est surjective, comme voulu. □

*Démonstration du théorème 1.4.* (a) L'application (1.2') est surjective d'après le lemme 5.3, donc le théorème 1.3 implique que l'application (1.3') est surjective.

(b) La partie (a) et un théorème de Kahn [CTSc21, Thm. 5.10] montrent que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible. Par hypothèse, il existe une variété projective et lisse $V$ de dimension $\leq 1$ et un morphisme $f : V \to S$ tels que pour tout corps algébriquement clos $\Omega$ contenant $\mathbb{F}$ l'homomorphisme d'image directe $f_* : CH_0(V_\Omega)_{\mathbb{Q}} \to CH_0(S_\Omega)_{\mathbb{Q}}$ est surjectif. Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, tous $P_1, P_2 \in S(\Omega)$ tels que $mP_1$ est rationnellement équivalent à $mP_2$, et tout $P \in C(\Omega)$, les 0-cycles $m \cdot (P, P_1)$, $m \cdot (P, P_2) \in X(\Omega)$ sont rationnellement équivalents. On en déduit que l'homomorphisme
$$(\mathrm{id}_C \times f)_* : CH_0(C_\Omega \times V_\Omega)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH_0(X_\Omega)_{\mathbb{Q}}$$
est surjectif, et donc que $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est supporté en dimension 2. Un argument de correspondances bien connu [CTK13, Proposition 3.2] implique alors que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par un entier positif. Comme le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible, il est nul. □

## Références


[Art71] M. Artin, *On the joins of Hensel rings*, Adv. Math. **7** (1971), 282–296.

[BO20] O. Benoist et J. C. Ottem, *Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero*, Comm. Math. Helv. **95** (2020), no. 1, 27–35.

[BO74] S. Bloch et A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–201.

[CP15] F. Charles et A. Pirutka, *La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre*, Compos. Math. **151** (2015), no. 2, 253–264.

[CTK13] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, *Cycles de codimension 2 et $H^3$ non ramifié pour les variétés sur les corps finis*, J. K-Theory **11** (2013), no. 1, 1–53.

[CTSS83] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 763–801.

[CTSk21] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 71, Springer, Cham, 2021.

[CTSc21] J.-L. Colliot-Thélène et F. Scavia, *Sur la conjecture de Tate entière pour le produit d'une courbe et d'une surface $CH_0$-triviale sur un corps fini*, prépublication arXiv:2001.10515v4 (2021).

[CTSz10] J.-L. Colliot-Thélène et T. Szamuely, *Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis*, dans : *The geometry of algebraic cycles*, pp. 83–98, Clay Math. Proc., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[Del74] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **43** (1974), 273–307.

[Del77] ———, *Cohomologie étale : les points de départ* (rédigé par J. F. Boutot), dans : *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie* (SGA 4 1/2), pp. 4–75, Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer-Verlag, 1977.

[Gro68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments*, dans : *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, pp. 88–188, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[God73] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1252, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Hermann, Paris, 1973.

[KS83] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2), **118** (1983), no. 2, 241–275.

[Kle05] S. Kleiman, *The Picard scheme*, dans : *Fundamental algebraic geometry*, pp. 235-321, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Lan56a] S. Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563.

[Lan56b] ———, *Unramified class field theory over function fields in several variables*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 285–325.

[Mat89] H. Matsumura, *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*. Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt, et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[PS16] R. Parimala et V. Suresh, *Degree* 3 *cohomology of function fields of surfaces*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2016), no. 14, 4341–4374.

[Pir16] A. Pirutka, *Sur la cohomologie non ramifiée en degré trois d'un produit*, Bull. Soc. Math. France **144** (2016), no. 1, 53–75.

[Sch98] C. Schoen, *An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields*, Math. Ann. **311** (1998), no. 3, 493–500.

[SGA 4I] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[SGA 4II] ———, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[SGA 4III] ———, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Sou84] C. Soulé, *Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini*, Math. Ann. **268** (1984), no. 3, 317–345.

[SP] The Stacks Project Authors, *The Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu.

[Tate66] J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Tate76] ———, *Relations between $K_2$ and Galois Cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[Tot21] B. Totaro, *The integral Hodge conjecture for $3$-folds of Kodaira dimension zero*, J. Inst. Math. Jussieu **20** (2021), no. 5, 1697–1717.